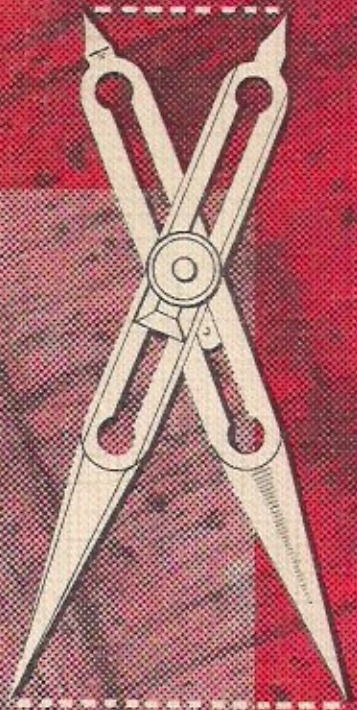
54 ptas.

Matemáticas

SEGUNDO CURSO



8 jul. 1964 - B. O. M. E. 16 jul. 1964

EDELVIVES

MATEMÁTICAS

SEGUNDO CURSO

© *Editorial Luis Vives, Zaragoza 1966*

N.º Registro: 1.206 - 62

ES PROPIEDAD DEPÓSITO LEGAL Z. 497 - 58 PRINTED IN SPAIN

EDITORIAL LUIS VIVES, P.º Fernando el Católico, 63 - Zaragoza

OBSERVACIÓN. — Algunas demostraciones, sobre todo en Geometría, por no corresponder a la edad de un alumno de Segundo Curso, las hemos puesto en tipo pequeño para indicar que es una simple ampliación del Programa.

SEGUNDO CURSO

MATEMÁTICAS

POR

EDELVIVES

Aprobado por O. M. del 8-VII-1964
«B. O. M. de E. N.», núm. 57, del 16-VII-1964
Año de publicación: 1966. — Precio: 54 ptas.

EDITORIAL LUIS VIVES — ZARAGOZA

ÍNDICE

ARITMÉTICA

	Págs.
Lección 1.ª — Revisión de sistemas de medidas	5
Lección 2.ª — Revisión de los números concretos	18
Lección 3.ª — Divisibilidad	28
Lección 4.ª — Dvisibilidad *(continuación)*	33
Lección 5.ª — Números primos	40
Lección 6.ª — Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	47
Lección 7.ª — Revisión de las fracciones ordinarias	55
Lección 8.ª — Multiplicación y división de fracciones	63
Lección 9.ª — Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa	71
Lección 10. — Potenciación de exponente natural	77
Lección 11. — Operaciones con potencias	83
Lección 12. — Raíz cuadrada	90
Lección 13. — Raíz cuadrada *(continuación)*	94
Lección 14. — Proporciones	101
Lección 15. — Series de razones iguales	107
Lección 16. — Proporcionalidad de magnitudes	114
Lección 17. — Regla de tres compuesta. Interés simple	123
Lección 18. — Repartos proporcionales. Mezclas y aleaciones	132

GEOMETRÍA

Lección 19. — Proporcionalidad entre segmentos	143
Lección 20. — Semejanza de triángulos	151
Lección 21. — Semejanza de polígonos	159
Lección 22. — Arcos de circunferencia. Ángulos centrales	169
Lección 23. — Ángulos en la circunferencia	175
Lección 24. — Polígonos regulares	182
Lección 25. — Longitud de la circunferencia	190
Lección 26. — Área del círculo	197
Lección 27. — Prisma y pirámide	203
Lección 28. — Cilindro, cono y esfera	211
Lección 29. — Volúmenes	218

ARITMÉTICA

1. Revisión de sistemas de medidas

1. Sistema métrico decimal. — Para medir una cantidad, es preciso elegir una unidad de la misma especie. Ahora bien: si cada uno escogiese las unidades a su capricho, sería imposible entenderse, pues resultarían números distintos. Se comprende, por tanto, la necesidad de adoptar un sistema de unidades igual para todos.

Antiguamente se empleaban unidades cuyo uso ofrecía muchos inconvenientes, ya que:

1.° No eran iguales para todos los países, ni siquiera para las diversas regiones de un mismo país.

2.° No eran fijas, pues no se ajustaban a un modelo o patrón invariable con el tiempo.

3.° Formaban un sistema demasiado complicado, debido a que la relación entre las distintas unidades y sus respectivos múltiplos y submúltiplos, no correspondía a la ley de formación de las unidades decimales.

Todos estos inconvenientes desaparecieron con la creación, a finales del siglo XVIII, del llamado *sistema métrico decimal*, adoptado hoy por casi todos los países cultos.

Sistema métrico decimal es el conjunto de unidades de medida que tiene por base el metro; en él las distintas unidades y sus respectivos múltiplos y submúltiplos se relacionan entre sí según los principios de la numeración decimal.

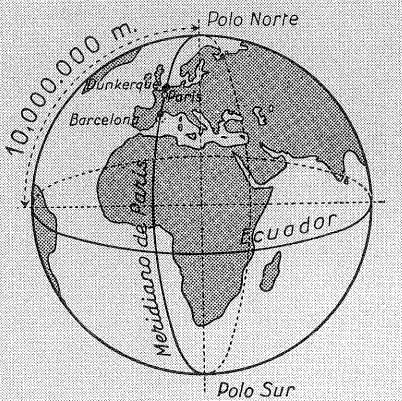


FIG. 1

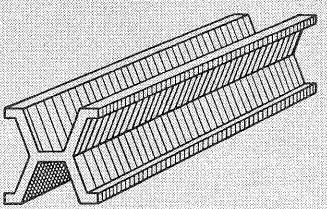


FIG. 2. — METRO PATRÓN

2. **Unidades de longitud.** — La UNIDAD PRINCIPAL de longitud es el metro, que se representa por m.

Metro-patrón es el segmento marcado sobre una regla de platino iridiado que se conserva en el Pabellón Internacional de pesas y medidas de París.

Para encontrar esta longitud, se midió el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona (fig. 1), y del resultado obtenido se dedujo la longitud correspondiente a un cuadrante de meridiano, luego, se construyó una regla metálica, hecha con una aleación de platino e iridio, y sobre ella se señaló la longitud equivalente a la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano.

Por eso, también suele definirse el metro, diciendo que *es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.*

Medidas posteriores, hechas con más precisión, demostraron que el modelo obtenido no era exactamente la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano. A pesar de esto, no se ha modificado la longitud del patrón o modelo de metro.

Del metro-patrón, cuya forma es la indicada en la figura 2, se hicieron copias exactas y se mandaron a los distintos países que adoptaron el sistema.

MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL METRO (*):

Decámetro (Dm. o dkm.)	= 10	m
Hectómetro (Hm. o hm.)	= 100	m. = 10 Dm.
Kilómetro (Km. o km.)	= 1.000	m. = 10 Hm. = 100 Dm.
Miriámetro (Mm. o mam.)	= 10.000	m. = 10 Km. = 100 Hm. = 1.000 Dm.

Decímetro (dm.)	= 0'1	m. = 10 cm. = 100 mm.
Centímetro (cm.)	= 0'01	m. = 10 mm.
Milímetro (mm.)	= 0'001	m.

3. **Observaciones.** — 1.ª Las unidades de longitud varían de diez en diez, o sea, cada unidad de longitud contiene diez unidades del orden inmediato inferior.

2.ª En la escritura, las unidades de longitud se corresponden con las de nuestro sistema de numeración. Es decir:

1) Cada cifra representa una clase de unidades.

2) Una cifra escrita a la derecha de otra, representa unidades de la clase inmediata inferior.

EJEMPLOS. — En 3.065'14 m., el 3 representa Km., el 0 Hm.. el 6 Dm., el 5 m., el 1 dm., y el 4 cm.

En 52'301 Km., el 5 representa Mm., el 2 Km., el 3 Hm., el 0 Dm., y el 1 m.

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE LONGITUD

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
•	•	•	•	•	•	•	•

Cada punto significa un lugar en la escritura.

4. **Unidades itinerarias.** — El *hectómetro,* el *kilómetro* y el *miriámetro,* empleados para expresar distancias geográficas, longitud de carreteras y ferrocarriles, etc., se llaman *unidades itinerarias.*

Los marinos emplean también la *milla marina,* que *equivale a la longitud de un arco de meridiano terrestre igual a un minuto.* Su valor es de 1.852 metros.

En efecto: dividiendo 10,000.000 de m., que es la longitud de un cuadrante de meridiano, por 90°, se obtiene 111.111 metros; esta longitud corresponde, por

(*) Nuevas notaciones de los múltiplos de las distintas unidades del s. m. d., cuyo uso está generalizado: deca, da o dk; hecto, h; kilo, k; miria, ma; quintal métrico, q; tonelada métrica, t.

tanto, a un grado de meridiano. Dividiendo ahora 111.111 por 60', se obtendrá la longitud correspondiente a un minuto:

$$111.111 : 60 = 1.852 \text{ metros} = 1 \text{ milla marina.}$$

5. Unidades de superficie. — Sirven para medir superficies o extensiones de dos dimensiones.

La UNIDAD PRINCIPAL es el metro cuadrado (m^2), que es la superficie de un cuadrado de un metro de lado (fig. 3).

MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS:

Decámetro cuadrado (Dm^2 o dkm^2)	= 10	× 10	= 100	m^2
Hectómetro cuadrado (Hm^2 o hm^2)	= 100	× 100	= 10.000	m^2
Kilómetro cuadrado (Km^2 o km^2)	= 1.000	× 1.000	= 1,000.000	m^2
Miriámetro cuadrado (Mm^2 o mam^2)	= 10.000	× 10.000	= 100,000.000	m^2
Decímetro cuadrado (dm^2)	= 0'1	× 0'1	= 0'01	m^2
Centímetro cuadrado (cm^2)	= 0'01	× 0'01	= 0'000.1	m^2
Milímetro cuadrado (mm^2)	= 0'001	× 0'001	= 0'000.001	m^2

Todas estas unidades son las superfies de cuadrados que tienen de lado, respectivamente, 1 Dm., 1 Hm., 1 Km., 1 Mm., 1 dm., 1 cm. y 1 mm.

6. Observaciones. — 1.ª Las unidades de superficie varían de cien en cien, o sea, cada unidad de superficie contiene 100 unidades del orden inmediato inferior.

2.ª No debe confundirse el dm^2 con la décima de m^2, el cm^2 con la centésima de m^2, el mm^2 con la milésima de m^2, etc.

3.ª Las superficies no se miden directamente por aplicación de la unidad, sino por medio del cálculo, como enseña la Geometría.

4.ª En la escritura, a cada unidad de superficie corresponden dos órdenes de nuestro sistema de numeración.

EJEMPLO:

$$1,340.056'078 \ m^2 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 34 & 00 & 56 & 07 & 80 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Km^2 & Hm^2 & Dm^2 & m^2 & dm^2 & cm^2 \end{array} \right.$$

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE SUPERFICIE

Mm^2	Km^2	Ha Hm^2	a Dm^2	ca m^2	dm^2	cm^2	mm^2
••	••	••	••	••	••	••	••

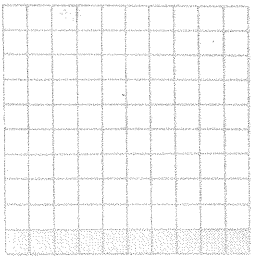


FIG. 3. — METRO CUADRADO (muy reducido)

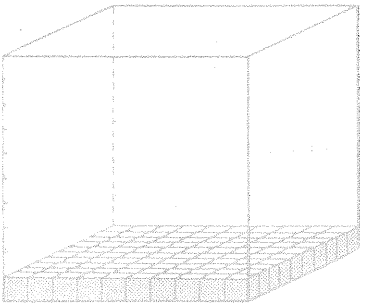


FIG. 4. — METRO CÚBICO (muy reducido)

7. **Unidades agrarias** (*). — Algunas unidades de superficie se denominan *agrarias*, cuando se aplican a la medición de los campos. Tales son, el Hm^2, el Dm^2 y el m^2. En este caso:

el Hm^2 recibe el nombre de *hectárea* (Ha. o ha)
el Dm^2 recibe el nombre de *área* (a)
el m^2 recibe el nombre de *centiárea* (ca).

Resultan, por tanto, las siguientes equivalencias:

1 Ha. = 100 a. = 10.000 ca. = 10.000 m^2 = 1 Hm^2
1 a. = 100 ca. = 100 m^2 = 1 Dm^2
1 ca. = 1 m^2

8. **Unidades de volumen.** — Sirven para medir el espacio o extensión considerada en sus tres dimensiones: largo, ancho y alto.

La UNIDAD PRINCIPAL es el metro cúbico (m^3), que es el volumen de un cubo de un metro de arista (fig. 4).

MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS:

Decámetro cúbico (Dm^3 o dkm^3)	= 10	× 10	× 10	= 1.000	m^3
Hectómetro cúbico (Hm^3 o hm^3)	= 100	× 100	× 100	= 1.000.000	m^3
Kilómetro cúbico (Km^3 o km^3)	= 1.000	× 1.000	× 1.000	= 1.000.000.000	m^3
Miriám. cúbico (Mm^3 o mam^3)	= 10.000	× 10.000	× 10.000	= 1.000.000.000.000	m^3
Decímetro cúbico (dm^3)	= 0' 1	× 0'1	× 0'1	= 0'001	m^3
Centímetro cúbico (cm^3)	= 0'01	× 0'01	× 0'01	= 0'000.001	m^3
Milímetro cúbico (mm^3)	= 0'001	× 0'001	× 0'001	= 0'000.000.001	m^3

(*) Del latín *ager, agris*, campo

Todas estas unidades son volúmenes de cubos que tienen, respectivamente, 1 Dm., 1 Hm., 1 Km., 1 Mm., 1 dm., 1 cm. y 1 mm. de arista.

Los múltiplos son de escaso uso en la práctica.

9 Observaciones.— 1.ª Las unidades de volumen varían de mil en mil, o sea, cada unidad de volumen contiene 1.000 unidades del orden inmediato inferior.

2.ª No debe confundirse el dm^3 con la décima de m^3, el cm^3 con la centésima de m^3, el mm^3 con la milésima de m^3, etc.

3.ª El volumen de los cuerpos no se mide en general directamente, sino por medio del cálculo, como enseña la Geometría.

4.ª En la escritura, a cada unidad de volumen corresponden tres órdenes de nuestro sistema de numeración.

1) Cada clase de unidades de volumen va representada por un grupo de tres cifras; la de la derecha representa unidades, la siguiente decenas, y la tercera centenas. Los grupos se forman a partir de la coma.

2) Cada grupo de tres cifras escrito a la derecha de otro, representa unidades de la clase inmediata inferior.

EJEMPLO:

$$48{,}000.035'0102\ m^3 = \begin{cases} 48 & 000 & 035 & 010 & 200 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Hm^3 & Dm^3 & m^3 & dm^3 & cm^3 \end{cases}$$

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE VOLUMEN

Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●

10. Unidades de capacidad. — Son las empleadas para medir el volumen de los recipientes destinados a guardar *líquidos* (vino, leche, aceite, etcétera) o *áridos* (trigo, cebada, arroz, etc.).

La UNIDAD PRINCIPAL es el litro (l.), que equivale a la capacidad de un decímetro cúbico.

MÚLTIPLOS:		SUBMÚLTIPLOS:	
Decalitro (Dl. o dkl.)	= 10 litros	Decilitro (dl.)	= 0'1 de litro
Hectolitro (Hl. o hl.)	= 100 litros	Centilitro (cl.)	= 0'01 de litro
Kilolitro (Kl. o kl.)	= 1.000 litros	Mililitro (ml.)	= 0'001 de litro
Mirialitro (Ml. o mal.)	= 10.000 litros		

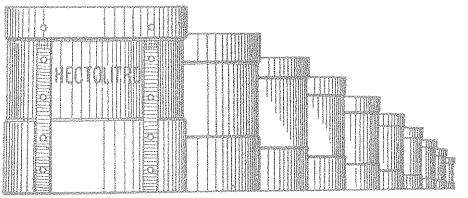


FIG. 5. — GRUPO DE MEDIDAS PARA GRANOS

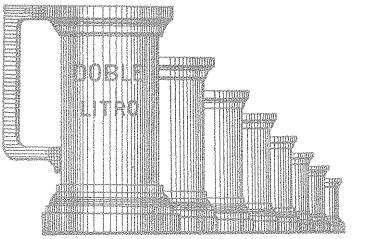


FIG. 6. — GRUPO DE MEDIDAS PARA LÍQUIDOS

Cada unidad vale 10 veces la unidad inmediata inferior. Por lo cual, se aplican aquí las mismas reglas dadas para las longitudes.

EJEMPLO:

15.642'037 l =	1	5	6	4	2	0	3	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE CAPACIDAD

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
●	●	●	●	●	●	●	●

11. **Unidades de peso.** — Sirven para determinar el peso de los cuerpos.

LA UNIDAD PRINCIPAL es el gramo (g.), que se define como *el peso, en el vacío, de un cm³ de agua destilada a la temperatura de 4° centígrados* (*).

Resultando pequeña esta unidad, se construyó luego un patrón de platino iridiado mil veces más pesado, llamado *kilogramo,* del que se sacaron copias con destino a los diversos países. Se ha visto posteriormente que este modelo no es exactamente el peso de 1.000 cm³ de agua destilada; no obstante, en lugar de modificar los modelos, se ha tomado por unidad, definiéndola así:

Kilogramo-patrón es un cilindro de platino iridiado que se conserva en París y cuyo peso, en el vacío, es el de 1 dm³ de agua pura a 4 grados centígrados.

(*) Se escoge esta temperatura, porque es cuando el agua es más pesada.

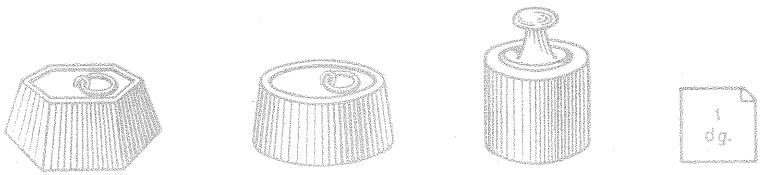


FIG. 7. — GRUPO DE PESAS (HIERRO, LATÓN)

MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL GRAMO:

Decagramo (Dg. o dkg.)	= 10 g.	Decigramo (dg.)	= 0'1 g.
Hectogramo (Hg. o hg.)	= 100 g.	Centigramo (cg.)	= 0'01 g.
Kilogramo (Kg. o kg.)	= 1.000 g.	Miligramo (mg.)	= 0'001 g.
Miriagramo (Mg. o mag.)	= 10.000 g.		

Como en realidad, la unidad que se toma es el kilogramo, y entre los anteriores, el Mg. es el único que aparece como múltiplo suyo, se han establecido otros dos múltiplos del Kg., a saber:

El quintal métrico (Qm. o q.) = 100 Kg.

La tonelada métrica (Tm. o t.) = 1.000 Kg.

Ordinariamente los pesos vienen expresados en Tm., Qm., Kg. y g. En las farmacias y laboratorios se usa el cg. y el mg.

Como en las medidas de longitud y de capacidad, también en las de peso cada unidad vale 10 veces la unidad inmediata inferior. Por tanto las reglas que dimos entonces sirven igualmente para los pesos.

EJEMPLO:

89.140'362 g =	8	9	1	4	0	3	6	2
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg

Es decir,

8'9140362 Mg = 89'140362 Kg = 891'40362 Hg =
= 8.914'0362 Dg = 89.140'362 g = ...

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE PESO

Tm	Qm	Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

12. Equivalencia entre volúmenes, capacidades y pesos. — Es fácil pasar de las unidades de volumen a las de capacidad, y, si se trata de agua destilada a 4° centígrados, resulta también sencillo calcular inmediatamente su peso. Recíprocamente: de una capacidad o de un peso, podemos pasar al volumen correspondiente. Bastará tener en cuenta las siguientes equivalencias:

VOLUMEN	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
BASE 10 ó 1.000	• • •	• • •	• • •	• • •
CAPACIDAD	Ml Kl	Hl Dl l	dl cl ml	
PESO (de agua)	Tm	Qm Mg Kg	Hg Dg g	dg cg mg

En las unidades de volumen la base es 1.000, y en las de capacidad y peso la base es 10.

EJEMPLO: 25 m^3 equivalen a 25 kilolitros = 25.000 l., y, si son de agua pura a 4° centígrados, su peso es igual a 25 Tm. = 25.000 Kg.

13. Unidades angulares y de arcos. — Sirven para medir los ángulos y los arcos de circunferencia. Se usan dos sistemas de unidades: el *sexagesimal* y el *centesimal*. La unidad principal es el *grado*.

I. DIVISIÓN SEXAGESIMAL. — En esta división se supone a la circunferencia dividida en 360 partes iguales llamadas grados. Cada grado se divide en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos. Los grados, minutos y segundos sexagesimales se representan, respectivamente, por los signos °, ′ y ″, colocados en la parte superior derecha de los números que expresan la medida del ángulo, o del arco.

EJEMPLO: 72° 18′ 4″, que se lee: 72 grados, 18 minutos y 4 segundos sexagesimales.

Grado sexagesimal es, pues, la trescienta-sesentava parte de la circunferencia.

La circunferencia	= 360 grados sexagesimales
El cuadrante o ángulo recto	= 90 grados sexagesimales
El grado	= 60 minutos sexagesimales
El minuto	= 60 segundos sexagesimales

II. División centesimal. — En ella se supone a la circunferencia dividida en 400 partes iguales llamadas grados, los grados en 100 minutos, y los minutos en 100 segundos. Los grados, minutos y segundos centesimales se representan, respectivamente, por las letras ^{g}, ^{m} y ^{s}, escritas en la parte superior derecha del número, a modo de exponentes.

Ejemplo: $138^{g}\ 56^{m}\ 95^{s}$, que se lee: 138 grados, 56 minutos y 95 segundos centesimales.

Grado centesimal es, pues, la centésima parte del cuadrante de la circunferencia,

La circunferencia	= 400 grados centesimales
El cuadrante o ángulo recto	= 100 grados centesimales
El grado	= 100 minutos centesimales
El minuto	= 100 segundos centesimales

14. Unidades de tiempo o unidades cronométricas. — Para medir el tiempo, se toman como fundamento los fenómenos astronómicos que se derivan del movimiento de la Tierra.

Día es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta sobre su eje.

El día se divide en 24 *horas*, la hora en 60 *minutos* y el minuto en 60 *segundos*.

Como múltiplos del día, se consideran la *semana*, que consta de 7 días, la *decena* (10 días) y la *quincena* (15 días).

Año es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol. En la práctica se considera el *año civil* de 365 días y cada 4 años de 366 (año bisiesto).

Regla. — *Son bisiestos los años múltiplos de* 4; *pero se exceptúan los múltiplos de* 100 *cuyas centenas no son múltiplos de* 4.

Por costumbre, el *año comercial* se toma de 360 días, aunque el Código de Comercio señala para él 365 días.

El año se divide en 12 *meses;* todos son de 31 días, excepto abril, junio, septiembre y noviembre, que tienen 30, y febrero, que es de 28 días los años ordinarios y de 29 los bisiestos.

Asimismo, se acostumbra a dividir el año en 2 *semestres*, en 3 *cuatrimestres* y en 4 *trimestres*.

Como múltiplos del año, se consideran: el *bienio* (dos años), el *trienio* (tres años), el *cuatrienio* (cuatro años), el *quinquenio* o *lustro* (cinco años), el *decenio* o *década* (diez años), el *siglo* (cien años) y el *milenio* (mil años).

EJERCICIOS

1. ¿Qué nombre se da a 1 centena de metros? — a 1 decena de litros? — a 1 millar de gramos? — a 1 centésima de metro? — a 1 décima de gramo?

2. ¿Qué nombre se daría a 1 décima de litro? — a 1 centésima de gramo? — a 1 milésima de metro? — a 1 millar de metros? — a 1 decena de gramos?

3. ¿Cuál es el múltiplo o submúltiplo del metro que vale 100 m.? — 1.000 m.? — 10.000 m.? — 0'1 m.? — 0'001 m.?

4. Decir, cambiando sólo el nombre de la unidad, un número 10 veces mayor que 5 m. — 10 veces menor. — 100 veces mayor. — 1.000 veces menor. — 1.000 veces mayor.

Problemas sobre las unidades de longitud:

5. ¿Cuánto vale 1 dm. de cinta, si 9'50 metros valen 28'50 ptas.?

6. Un tren anduvo durante 2 horas con una velocidad media de 45'8 Km. por hora, y luego, durante 5 horas, con una velocidad de 39'25 Km. ¿Cuál fue en miriámetros el trayecto recorrido por dicho tren?

7. Si 3 pasos de una persona mayor equivalen a 1'95 m., ¿cuántos pasos habría que dar para ir del polo Norte al polo Sur, supuesto que ambos estuvieran unidos por una carretera que siguiera la dirección de un meridiano?

8. ¿Cuántos metros de rieles se necesitarán para el tendido de una doble vía entre dos ciudades que distan 21 Km. 8 Hm. 7 m.?

9. Una torre tiene 64'26 m. de altura. Si su ascensión se efectúa por una escalera de 375 gradas, ¿cuántos milímetros de altura tiene cada grada?

10. El sonido recorre 340 m. por segundo. ¿A cuántos kilómetros se disparó un cañón cuyo estruendo tardó en llegar 13 segundos después de verse el fogonazo?

11. En una hora y 35 minutos un tren ha recorrido 84 Km. ¿Cuántos metros recorrió por minuto?

12. Se quieren plantar árboles a ambos lados de una carretera cuya longitud es de 169 Km., 4 Hm., 4 Dm. y 7'5 m. ¿Cuántos árboles se necesitarán, si la separación en que han de ir colocados uno de otro es de 7'50 metros?

13. Con 104'50 m. de trenza se pueden hacer 95 pares de cordones para calzado. ¿Cuál es, en centímetros, la longitud de cada cordón?

14. Las ruedas mayores de un coche de caballos tienen 2'25 m. de circunferencia, y las menores, 1'44 m. ¿Cuántas vueltas darán éstas más que las mayores en un trecho de 13 Km., 2 Hm., 1 Dm. y 2 m.?

Ejercicios y problemas sobre las unidades de superficie:

15. Leer los siguientes números, enunciando todos los múltiplos y submúltiplos: 1.º, 6'3458 m^2; 2.º, 1.374'576 Dm^2; 3.º, 8'46742892 Hm^2; 4.º 67.324'561 m^2; 5.º, 0'49028 dm^2.

16. ¿A cuántos metros cuadrados corresponden 7 Ha., 5 a. y 32 ca.?

17. ¿Cuánto vale un solar de 7 Hm^2 y 4 m^2, a razón de 13'75 ptas el m^2?

18. ¿Cuántas losas cuadradas de 4 dm. de lado son necesarias para enlosar un patio de 36'20 m. por 248 dm.?

19. Cuánto se pagará por 850 m^2 de terreno, a razón de 52.000 pesetas el Hm^2?

20. ¿A cuánto sale el dm^2 si por 25 m^2 se han pagado 357 pesetas?

21. Tres habitaciones tienen, la primera 5'15 m. de largo por 4 de ancho; la segunda, 6'50 m. de largo por 5'80 m. de ancho, y la tercera, 7'15 m. de largo por 6'20 m. de ancho. ¿Cuánto costará el embaldosado de estas tres habitaciones, a razón de 0'65 ptas. el dm^2.?

22. Una carretera mide 16 m. de ancho. ¿Cuál es, en hectómetros cuadrados, la superficie del terreno ocupado por dicha carretera, sabiendo que tiene una longitud de 265 Km.?

23. ¿Cuántas tablas de 3'50 m. de largo por 1'2 dm. de ancho se necesitarán para entarimar una sala de 24 m. de largo por 940 cm. de ancho?

24. Al encerado de la clase le faltan 30 cm^2 para llegar a tener 3 m^2 de superficie. Averiguar la anchura que tiene, sabiendo que su longitud es de 1'85 m.

Problemas sobre las unidades de volumen:

25. Hallar el valor de 900.000 cm^3 a 457'30 ptas. el metro cúbico.

26. Si el metro cúbico vale 175 ptas., ¿cuánto valen 678 dm^3?

27. ¿Cuántas veces están contenidos 12 dm^3 en 1'728 m^3?

28. Calcular en m^3 el volumen de la tierra sacada de una zanja de 3 Hm. de longitud, 2 m. de anchura y 3'20 m. de profundidad.

29. Una caja de 1'368 m^3 de volumen se ha llenado con trozos de jabón de 285 cm^3 cada uno. ¿Cuántos trozos pudieron meterse?

30. Una bomba puede extraer 58'50 m^3 de agua en una hora. ¿Qué cantidad extraerá al cabo de 15 horas y media?

31. ¿Cuánto costará el trasladar un montón de tierra de 68 m^3, si para ello emplea un hombre una carretilla en la que caben 84 dm^3 y al que se le pagan 1'25 pesetas cada viaje?

Problemas sobre unidades de capacidad:

32. ¿Cuántas botellas, de 7 $\frac{1}{2}$ dl. cada una, se necesitan para embotellar 14'16 hectolitros de vino?

33. Un tabernero compró 5 cubas de vino por 4.084'50 ptas. La primera contenía 2'40 Hl.; la segunda, 23'5 Dl.; la tercera, 228 litros, y la cuarta, 219 litros. Averiguar la capacidad de la quinta cuba, sabiendo que pagó el vino a razón de 350 pesetas hectolitro.

34. Una bomba saca 90 litros por minuto. ¿En cuánto tiempo vaciará un depósito de 4 m. de largo por 2'50 m. de ancho y 1'35 m. de profundidad?

35. Un hombre respira 16 veces por minuto. Cada vez introduce en sus pulmones 4'5 dl. de aire. ¿Cuál es en m^3 el volumen del aire inspirado en 24 horas?

36. Un grifo, que arroja 7'5 l. por minuto, ha estado abierto durante 6 horas y 20 minutos. ¿Cuánto tiempo deberá seguir abierto para acabar de llenar un depósito cuya cabida es de 4'875 metros cúbicos?

Problemas sobre las unidades de peso:

37. Si el medio kilo de azúcar se ha pagado a 5'35 ptas., ¿a cómo resultan los 250 gramos?

38. ¿Cuánto valen 8 $\frac{1}{2}$ Tm. de harina a razón de 308'50 ptas. el Qm.?

39. La cosecha de remolacha que obtuvo este año un labrador, fue: de una finca, 45 Qm. 8 Mg. y 6 Kg., y de otra 2 Tm. 4 Qm. y 10 Kg. ¿Cuántos kilogramos recogió? ¿Cuánto cobrará por toda la cosecha si le pagan la Tm. a 815 pesetas?

40. Una alhaja de oro pesa 7 g., 3 cg. y 4 mg., y una pulsera, también de oro, pesa 12 g., 5 dg. y 8 cg. ¿Cuál será el importe de ambas joyas a razón de 17 duros el gramo de oro?

Relación entre las medidas de volumen, capacidad y peso:

41. ¿Cuál es, en gramos, el peso: 1.º, de 1 cm^3 de agua; 2.º, de 27 cm^3; 3.º, de 9 dm^3; 4.º, de 13 cm^3 y 25 mm^3; 5.º, de 80 cm^3 y 675 mm^3?

42. ¿Qué volumen ocupan: 1.º, en centímetros cúbicos, 125 g. de agua; 2.º, en decímetros cúbicos, 18 Kg.; 3.º, en metros cúbicos, 20 Qm.?

43. ¿Cuál es el peso: 1.º, en gramos, de 15 cm^3 de agua; 2.º, en kilogramos, de 18 litros; 3.º, en Qm., de 3 $\frac{1}{2}$ Hl.; 4.º, en gramos, de 75 cl.?

44. Un estanque de 25 m. de largo por 5'60 de ancho y 2'50 de profundo, se llena en 16 horas. ¿Cuántos hectolitros de agua llegan al referido estanque en una hora?

2. Revisión de los números concretos

15. Medida de una cantidad. — Elegida una *unidad,* podemos averiguar las veces que está contenida en una cierta cantidad de su misma especie. La operación que así habremos efectuado se denomina *medir la cantidad.*

Medir una cantidad es averiguar las veces que contiene a la unidad de su misma especie.

Las veces que la unidad está contenida en la cantidad se representa por un número. En todo número que exprese la medida de una cantidad, debe ponerse a continuación la unidad que se ha utilizado.

La medida de una cantidad es siempre un número concreto.

16. Números concretos. Complejos e incomplejos. — Llámanse *números concretos* aquellos que indican la especie de unidades a que se refieren, v. g., 3 kilogramos, 5 centímetros.

Los *números abstractos,* por el contrario, no expresan la especie de unidades a que se refieren, v. g., 3, 5.

Los números concretos pueden ser *incomplejos* y *complejos* (*).

Son *incomplejos* cuando expresan unidades de un solo orden. Ejemplo: 8 días.

Son *complejos* cuando expresan unidades de distintos órdenes o tamaños, pero de la misma especie. Ejemplo: 8 días, 7 horas, 49 minutos.

Hágase un repaso de la lección 21 de primer curso sobre transformación de números concretos.

Ahora nos limitaremos a resolver algún ejercicio que sirva de modelo.

(*) Los números complejos de que tratamos estaría mejor llamarlos de «forma compleja» para no confundirlos con los propiamente complejos que se estudiarán en otros cursos.

17. I. *Reducir* 20° 15′ 36″ *a segundos.*

20° equivalen a $20 \times 60 = 1.200'$

Sumando estos 1.200′ con los 15′ que había, serán $1.200' + 15' = 1.215'$

Y 1.215′ equivalen a $1.215 \times 60 = 72.900''$

Luego, en 20° 15′ 36″ habrá $72.900 + 36 = 72.936''$

20
× 60
1.200
+ 15
1.215
× 60
72.900
+ 36
72.936

REGLA GENERAL:

Para reducir un número complejo a incomplejo de su orden inferior, se reducen las unidades superiores del complejo al orden inmediato inferior y se añaden las que haya de ese orden; se reduce el número que resulte al orden inmediato inferior y se suman las unidades que haya de este orden en el número dado. Se continúa así hasta llegar a la especie inferior.

18. II. *Descomponer el incomplejo* 584.714 *segundos en sus diversas unidades de tiempo.*

584714 s.	| 60 (segundos que tiene un minuto)		
447	9745 m.	| 60 (minutos que tiene una hora)	
271	374	162 h.	| 24 (horas que tiene un día)
314	145	Resto 18 h.	6 días
Resto 14 s.	Resto 25 m.		

584.714 s. = 6 días 18 h. 25 m. 14 s.

En general, aplicaremos la siguiente regla:

Para convertir un número incomplejo en complejo, se reduce al orden inmediato superior; luego se hace lo mismo con el cociente obtenido y todos los siguientes. El último cociente y los restos hallados en las divisiones efectuadas, forman el complejo pedido.

19. III. *Valuar la fracción* $\frac{8}{11}$ *de recto (a órdenes sexagesimales).*

Tendremos:

$\frac{8}{11}$ de recto $\times 90 = \frac{720}{11} = 65° + \frac{5}{11}$ de grado.

$\frac{5}{11}$ de grado $\times 60 = \frac{300}{11} = 27' + \frac{3}{11}$ de minuto.

$\frac{3}{11}$ de minuto $\times 60 = \frac{180}{11} = 16'' + \frac{4}{11}$ de segundo.

Luego, $\frac{8}{11}$ de recto $= 65°\ 27'\ 16''$ y $\frac{4}{11}$ de segundo.

Las operaciones se disponen como se indica al margen.

$8 \times 90 = 720$

$720 \mid 11$
$060 \quad 65°$

5
$\times 60$
$300 \mid 11$
$080 \quad 27'$

3
$\times 60$
$180 \mid 11$
$070 \quad 16''$
04

El procedimiento seguido lo podemos sintetizar en la siguiente regla:

Para valuar una fracción de un número concreto, se divide el numerador por el denominador; el cociente entero serán las unidades del orden en que la fracción venía referida. El resto se reduce al orden inmediato inferior, obteniéndose luego por nueva división las unidades de dicho orden. El resto se reduce al orden que le es inmediatamente inferior, y así se continúa hasta llegar a las unidades del orden inferior posible.

El número complejo pedido estará formado por los sucesivos cocientes enteros, debiendo añadir al último, una fracción formada por el último resto obtenido, como numerador, y cuyo denominador sea el de la fracción propuesta.

20. IV. *Valuar la expresión decimal de un número concreto.*

Sea el número 14'3893 días.

14'3893 días = 14 días + 0'3893 fracción de día
0'3893 × 24 = 9 horas + 0'3432 fracción de hora
0'3432 × 60 = 19 minutos + 0'592 fracción de minuto
0'592 × 60 = 35'12 segundos

Es decir, que 14'3893 días = 14 días 9 horas 20 minutos 35'12 segundos.

La expresión verbal de la regla que ha de seguirse en este caso, la dejamos como ejercicio para el alumno.

21. **Si se trata de números del Sistema Métrico Decimal** la reducción de complejos a incomplejos suele hacerse directamente, aplicando la siguiente regla práctica:

Para convertir un complejo métrico en sus unidades principales:

1.° **Se escriben unos a continuación de otros los números que indican las unidades de cada orden.**

2.° **Debiendo ocupar cada múltiplo o submúltiplo** UN LUGAR **en las unidades de longitud, capacidad y peso,** DOS LUGARES **en las de superficie, y** TRES LUGARES **en las de volumen, se cuidará de poner uno o dos ceros delante de aquellos órdenes que se hallen incompletos, cuando se trate de medidas de superficie o de volumen. El primer orden se escribirá tal como aparezca, ya que puede constar de una o de varias cifras.**

3.° **Cuando falte algún orden, se pondrá en su lugar** UN CERO **en las medidas de longitud, capacidad y peso,** DOS CEROS **en las de superficie, y** TRES CEROS **en las de volumen.**

4.° **Se coloca una coma a la derecha del número que expresa el orden de la unidad principal.**

EJEMPLOS:

17 Mm., 3 Km., 9 Dm., 5 cm. = 173.090'05 m.

9 Mg., 3 Hg., 2 Dg., 8 g., 1 dg., 3 cg. = 90.328'13 g.

12 Mm^2, 2 Km^2, 75 Hm^2, 8 dm^2, 15 cm^2 = $1.202_{1}750.000'0815$ m^2

6 Km^3, 305 Hm^3, 77 m^3, 3 dm^3 = $6.305_{1}000.077'003$ m^3

Una vez hecha la reducción a unidades principales, si se quieren convertir en un múltiplo o submúltiplo cualquiera, bastará correr la coma hacia la izquierda o hacia la derecha *uno, dos* o *tres lugares* por cada orden, según se trate de medidas de longitud, capacidad y peso, de superficie o de volumen, respectivamente.

Así,

173.090'05 m. = 17'309005 Mm. = 173'09005 Km. = $1_{1}730.900'5$ dm.

$1.202_{1}750.000'0815$ m^2 = 120.275'00000815 Hm^2 = $120.275_{1}000.008'15$ dm^2

$6.305_{1}000.077'003$ m^3 = 6'305000077003 Km^3 = $6_{2}305.000_{1}077.003$ dm^3

Para reducir un número incomplejo métrico a complejo, se descompone en los distintos órdenes de unidades, teniendo en cuenta que en las medidas de longitud, capacidad y peso, cada orden ocupa *un lugar;* en las de superficie, *dos* y, en las de volumen, *tres.*

EJEMPLOS:

231.075'17 m. = 23 Mm., 1 Km., 7 Dm., 5 m., 1 dm., 7 cm.

50,290.250 ml. = 5 Ml., 2 Hl., 9 Dl., 2 dl., 5 cl

35.207'355.630 Dm^3 = 35 Hm^3, 207 Dm^3, 355 m^3, 630 dm^3

OPERACIONES CON NÚMEROS CONCRETOS

Sería conveniente repasar la lección 22 de primer curso, que trata de esta materia. Aquí resolveremos algún ejercicio que sirva de modelo.

22. Adición de complejos.

Para sumar complejos se suman por separado los de cada orden de unidades, comenzando por el orden inferior. Las unidades del orden inmediato superior que resulten de cada suma parcial, se añaden a la columna siguiente.

EJEMPLO. — Hallar la siguiente suma de ángulos:

15°	41′	25″
32°	38′	16″
14°	40′	50″
61°	119′	91″
63°	**0′**	**31″**

23. Sustracción de complejos.

Si los números tienen forma de complejos, se les puede reducir a incomplejos del mismo orden de unidades, y luego restarlos. Pero si no pertenecen al sistema métrico, es preferible restar separadamente los de cada orden de unidades, empezando por el orden inferior. Si algún minuendo parcial es menor que su correspondiente sustraendo, se añaden a aquél las unidades de su orden que estén contenidas en una del orden superior, cuidando luego de disminuir en una unidad al minuendo siguiente.

EJEMPLO. — De 8 semanas 3 días y 10 horas, restar 4 semanas 5 días y 14 horas.

(7 s.)	(9 d.)	(34 h.)
8 s.	3 d.	10 h.
−4 s.	5 d.	14 h.
3 s.	**4 d.**	**20 h.**

24. Multiplicación de complejos.

Para multiplicar un número concreto, expresado en forma de complejo, por un número natural, se multiplican las unidades de cada orden por el multiplicador, separando luego de cada producto parcial las unidades de orden superior que contengan, para añadirlas al orden siguiente.

EJEMPLOS:

	4 h.	18 m.	14 s.
			×7
	28 h.	126 m.	98 s.
1 d.	**6 h.**	**7 m.**	**38 s.**

12°	36′	42″
		× 4
48°	144′	168″
50°	**26′**	**48″**

25. División. — Pueden presentarse dos casos:

PRIMER CASO. — División de un número concreto por un número abstracto.

Para dividir un número concreto, expresado en forma de complejo, por un número abstracto, se dividen sucesivamente las unidades de los distintos órdenes, comenzando por las del orden superior, y convirtiendo cada resto en unidades del orden inmediato inferior, las cuales se suman con las correspondientes del dividendo.

EJEMPLO. — Dividir 33 h. 7 m. 30 s. entre 15.
En la práctica, la operación se dispone del modo siguiente:

```
33 h.     7 m.     30 s. | 15
 3 h. = 180 m.            2 h.  12 m.  30 s.
        187 m.
         37 m.
          7 m. = 420 s.
                 450 s.
                 000
```

SEGUNDO CASO. — División de un número concreto por otro de igual naturaleza.

REGLA: **Para dividir un número concreto por otro de igual naturaleza, se reducen ambos a incomplejos del mismo orden de unidades y se efectúa luego la división.**

EJEMPLO. — Determinar cuántas veces mayor es el ángulo 97° 57′ 30″ respecto del que tiene por valor 12° 14′ 42″.

La solución será el cociente de dividir 97° 57′ 30″ por 12° 14′ 42″. Para hallar dicho cociente, reduciremos los dos ángulos a segundos y luego efectuaremos la división. Tenemos:

$$97° \ 57' \ 30'' = 352656''; \qquad 12° \ 14' \ 42'' = 44082''$$
$$352656 : 44082 = 8$$

Luego, el primer ángulo es 8 veces mayor que el segundo.

EJERCICIOS

45. ¿Qué unidad se habrá de emplear para expresar la longitud de un jardín? — la superficie de un patio? — el volumen del agua de un depósito? — la cabida de un tonel? — el peso de un saco de trigo? — el valor de un mueble?

Reducción de complejos métricos a unidades principales:

46. Reducir a metros: 69 Mm., 5 Km., 7 Dm. y 18 cm.
47. Reducir a gramos: 17 Mg., 8 Hg., 3 g., 6 dg. y 15 mg.
48. Reducir a litros: 8 Kl., 3 Hl., 6 l., 9 dl. y 2 cl.
49. Reducir a metros cuadrados: 7 Km^2, 28 Dm^2, 14 m^2 y 30 dm^2.
50. Reducir a metros cúbicos: 35 Hm^3, 703 m^3, 2 dm^3 y 300 cm^3.
51. Reducir a gramos: 87 Mg., 6 Hg., 5 Dg., 2 dg. y 3 mg.
52. Reducir a litros: 8 Kl., 5 Hl., 3 Dl., 2 l. y 6 cl.
53. Reducir a metros cuadrados: 7 Km^2, 20 Dm^2, 17 m^2, 5 cm^2 y 23 mm^2.
54. Reducir a metros cúbicos: 102 Hm^3, 35 Dm^3 y 830 dm^3.
55. Reducir a metros cúbicos: 78 Km^3, 8 Dm^3, 103 m^3, 19 dm^3 y 2 cm^3.
56. Reducir a litros: 16 Ml., 8 Kl., 3 Dl., 8 cl. y 2 ml.

Reducción de unidades principales a unidades superiores o inferiores:

57. Reducir 119.004'32 m. a Mm., — a Hm., — a cm.
58. Reducir 50.301'2 litros a Kl., — a Dl., — a dl.
59. Reducir 803,004.754'019 m^2 a Mm^2, — a Dm^2, — a cm^2.
60. Reducir 11.206,001.333'509 m^3 a Km^3, — a Dm^3, — a dm^3.
61. Reducir 1.038'567 litros a Hl., — a cl., — a ml.
62. Reducir 6.401,000.056'2115 m^2 a Km^2, — a Dm^2, — a cm^2
63. Reducir 1,056.623'1247 m^2 a Km^2, — a Dm^2, — a dm^2
64. Reducir 108.329'302 g. a Mg., — a Hg., — a mg.

Reducción de incomplejos métricos a complejos:

65. Reducir a complejo: 21.018'235 m.

66. Reducir a complejo: $7_{i}800.314$ cl.

67. Reducir a complejo: $59_{,}650.331$ mg.

68. Reducir a complejo: $82_{i}103.001'387520$ m^2.

69. Reducir a complejo: 379.222'001403 Hm^3.

70. Reducir a complejo: $3_{,}084.065'204$ gramos.

71. Reducir a complejo: $21_{,}506.315$ milímetros.

72. Reducir a complejo: $100_{,}056.039'002116$ m^3.

73. Reducir a complejo: 71.026'35 dg.

Operaciones con números complejos métricos:

74. Sumar: 8 Km., 3 Dm., 5 m. y 3 cm., con 56 Hm., 7 Dm. y 40 dm.

75. Restar: 10 Kl., 4 Hl. y 3 l., de 39 Kl., 8 Hl., 4 Dl. y 2 l.

76. Multiplicar: 9 Kg., 6 Dg. y 2 dg. por 7.

77. Dividir: 17 Km^2, 53 Hm^2, 64 m^2 y 28 dm^2 por 3.

78. Sumar: 15 Kg., 4 Hg., 6 g. y 8 cg. con 2 Mg., 7 Kg., 3 Dg. y 9 dg.

79. Restar: 3 Km^2, 19 Hm^2 y 30 m^2, de 12 Km^2, 8 Dm^2 y 15 dm^2.

80. Multiplicar: 7 Hl., 4 Dl. y 9 l. por 26'50.

81. Dividir: 7 Mg., 8 Kg., 3 Dg. y 43 g. por 3'80.

* * *

82. Expresar en segundos los ángulos 73° 25′ 12″ y 43° 14′.

83. Hallar los minutos que hay en un día; en una quincena.

84. ¿Cuántos días hay en 44.640 minutos? ¿Cuántos en $2_{i}332.800$ segundos?

85. Expresar en grados los ángulos 255.600″ y 930.000 s.

86. ¿Cuántos minutos hay en 4 semanas, 3 días, 17 horas y 12 minutos?

87. ¿Cuántos reales son 97 duros, 2 pesetas y 3 reales?

88. Convertir en rectos, grados, minutos y segundos el incomplejo $1_{,}235.107^{s}$

89. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las cuatro y media? Y a las diez y media?

90. Reducir a complejo el incomplejo $2_{,}637.204$ segundos de tiempo.

91. ¿Cuántos segundos de diferencia hay entre 27 horas y 1.654 minutos?.

Valuar las siguientes expresiones:

92. $\frac{25}{13}$ de día.

93. $\frac{4}{7}$ de recto (a órdenes sexag.).

94. 5'207 horas.

95. 0'7345 recto (a órdenes sexag.).

96. 365'242217 días.

97. ¿Cuántas monedas de 50 céntimos, — de 10 céntimos equivalen a un duro?

98. ¿Cuál es el valor en pesetas de 25 monedas de a duro, 17 de a 2'50 pesetas y 35 de a 50 céntimos?

99. ¿Qué suma se ha pagado con 8 billetes de 25 ptas., 7 monedas de a duro, 14 de a peseta, 5 de a 0'50, 3 de a 0'10 y 6 de a 0'05 pesetas?

100. Con tres billetes de 1.000 ptas., uno de 500, dos de 100, dos de 5 y tres de una, se ha pagado el importe de una bicicleta y de 7 balones. Hallar el precio de un balón, sabiendo que por la bicicleta se pagaron 1.200 ptas.

101. Un obrero que cobra 69'50 ptas. diarias, gasta semanalmente 295. ¿Cuánto ahorrará en un año?

102. He vendido 2 Tm. de remolacha a 0'80 ptas. kilo, 5 pollos a 80'75 pesetas uno, y 3 conejos a 58'30 ptas. ¿Cuánto recibiré por todo?

103. El sueldo anual de un empleado al ingresar en una casa es de 27.667 pesetas. ¿Cuánto cobra al día? ¿Cuánto cobrará diariamente al cabo de 12 años de servicio en dicha casa, si por cada trienio tiene derecho a un aumento de 2.500 pesetas en su sueldo anual?

104. Un reloj que ahora señala las 4, 31 minutos y 48 segundos, hace una semana, a la misma hora, señalaba las 4 y cuarto. ¿Cuántos segundos se adelanta a la hora?

105. El número de nacimientos y defunciones habidos en España durante el año 1954, fue de 571.333 y 258.937, respectivamente. Hallar: 1.º, el crecimiento de la población española en dicho año; 2.º, el promedio diario de nacimientos y defunciones.

106. Un señor hizo un viaje en el que invirtió 11 horas 46 minutos. Si salió a las 7 y 10 de la mañana, ¿a qué hora llegó a su destino?

107. Restar los ángulos 57° 12′ 4″ y 22° 43′ 35″.

108. Hallar el complemento de los siguientes ángulos:

42° 13′;	15° 56′;	72° 29′ 9″;	65° 4′ 25″
$57^g\ 26^m$;	$23^g\ 17^m$;	$80^g\ 11^m\ 95^s$;	$4^g\ 77^m\ 3^s$

109. Hallar el suplemento de los ángulos siguientes:

$102° \ 16'$; $83° \ 51'$; $122° \ 13' \ 37''$; $41° \ 33' \ 2''$
$99^g \ 13^m$; $154^g \ 11^m$; $189^g \ 76^m \ 15^s$; $5^g \ 34^m \ 81^s$

110. Hallar en grados, minutos y segundos sexagesimales, el complemento y el suplemento de la diferencia entre los ángulos 1'58 rectos y 0'79 rectos.

111. Multiplicar por 9 el ángulo $23° \ 12' \ 45''$.

112. ¿Cuánto miden los ángulos que determina la bisectriz de cada uno de los ángulos siguientes?

$75° \ 41' \ 7''$; $105° \ 26' \ 15''$; $171^g \ 17^m \ 12^s$; $105^g \ 26^m \ 14^s$.

113. Hallar el ángulo que equivale a la séptima parte del que mide $100° \ 40' \ 36''$.

114. ¿Cuánto medirá el ángulo que es las 4 novenas partes de $81° \ 16' \ 34''$?.

115. Expresar en fracción decimal de recto los ángulos $58° \ 34' \ 9''$ y $58^g \ 34^m \ 9^s$?

116. Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales un ángulo que, referido a rectos, mide 0'49182.

117. Dados los ángulos $A = 32° \ 41' \ 18''$, $B = 73° \ 55' \ 7''$, $C = 28° \ 4' \ 19''$ y $D = 40° \ 12' \ 39''$, calcular la diferencia $(B+C) - (A+D)$.

118. Un automóvil tarda 3 h., 15 m., 50 s. en efectuar un recorrido. ¿Cuánto tardará en efectuar 12 veces el mismo recorrido, supuesta la misma velocidad?

119. Un motorista ha empleado 5 h., 36 m., 24 s. en dar 8 vueltas a un circuito. ¿Cuánto tiempo invirtió en cada vuelta?

120. Un reloj se ha adelantado 1 h., 11 m., 25 s. en un mes de 30 días. Hallar cuánto se adelantará al cabo de un año, suponiendo que no se hace en él ninguna reparación.

121. El tiempo que tarda la Luna en dar una vuelta alrededor de la Tierra es de 27 días, 7 h., 43 m. ¿Cuál será la duración de 12 vueltas?

122. Una máquina de cine proyecta unas 30 vistas por segundo. ¿Cuántas vistas se habrán proyectado en una película que ha durado 1 h., 45 m., 12 s.?

123. Si un depósito se ha llenado en 18 h., 26 m., 15 s., empleando una sola bomba, ¿en cuánto tiempo lo llenarían tres bombas iguales a la primera?

124. Tres ángulos A, B y C son consecutivos y tienen en línea recta los lados del primero y tercero no comunes con el segundo. ¿Cuál será la medida del ángulo que forman entre sí las bisectrices de A y C, suponiendo que $A = 18° \ 21' \ 19''$ y $B = 51° \ 17' \ 40''$?

3. Divisibilidad

26. Notación literal de los números. — Cuando en Matemáticas queremos representar números cualesquiera, lo hacemos generalmente por medio de letras. Así, decimos, v. g., el número *a*, el número *b*, el número *N*. Dicha *notación literal*, a la que ya estamos acostumbrados por las fórmulas de Geometría, tiene la ventaja de que con ella se llega a resultados *generales*, es decir, igualmente válidos para todos los casos particulares que puedan considerarse.

27. Concepto de múltiplo y divisor de un número.

1.° **Un número es múltiplo de otro, cuando el primero contiene al segundo un número exacto de veces.**

2.° **Un número es divisor de otro, cuando la división del segundo por el primero es exacta.**

EJEMPLO. — Por ser exacta la división $56 : 8 = 7$ diremos que 56 (el número mayor o dividendo), es múltiplo de 8, o también que 56 es divisible por 8. De 8 decimos que es divisor, o factor, de 56.

OBSERVACIONES. — 1.ª *Todo número es múltiplo y divisor de sí mismo.*

$$7 \times 1 = 7, \qquad 7 : 7 = 1, \qquad a \times 1 = a, \qquad a : a = 1.$$

2.ª *La unidad es divisor de cualquier número.*

$$3 : 1 = 3, \qquad 5 : 1 = 5, \qquad a : 1 = a.$$

3.ª *En un producto de varios factores, cada uno de los factores es divisor del producto.*

Sea, por ejemplo, el producto $12 \times 17 = 204$. Al dividir 204 por 17, obtenemos 12 de cociente; y si dividimos 204 por 12, el cociente exacto que resulta es 17. Luego, 12 y 17 son divisores del producto.

4.ª *Los divisores de un número son siempre en número limitado, ya que no pueden ser mayores que él.*

EJEMPLOS. — Los divisores de 10 son 1, 2, 5 y 10.
Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
Los divisores de 15 son 1, 3, 5 y 15.

5.ª *Los múltiplos de un número son, en cambio, en número infinito. Para obtener múltiplos de un número, bastará multiplicarlo por la serie natural de los números.*

Así, son múltiplos de 3:

$3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$; $3 \times 4 = 12$; $3 \times 5 = 15$; ...

Todos estos productos, en efecto, dan cocientes exactos al dividirlos por 3.

28. Notación. — Se indica que un número es múltiplo de otro, poniendo un punto sobre este último. Así, las expresiones

$$28 = \dot{7}, \qquad 45 = \dot{9}, \qquad a = \dot{m}$$

se leen: 28 igual a múltiplo de 7, 45 igual a múltiplo de 9, a igual a múltiplo de m.

29. Propiedad transitiva.

Si un número es múltiplo de otro, los múltiplos del primer número lo son también del segundo.

EJEMPLO. — Si $60 = \dot{10}$ y $10 = \dot{5}$, $60 = \dot{5}$.

En general: si $a = b \cdot n = \dot{b}$ y $b = c \cdot m = \dot{c}$

tendremos: $a = b \cdot n = (c \cdot m)n = c(m \cdot n) = \dot{c}$

es decir, que a también es múltiplo de c.

Análogamente, veríamos que:

Si un número divide a otro, los divisores del primer número dividen también al segundo.

30. Suma o diferencia de múltiplos de un número.

1. La suma de varios múltiplos de un número es también múltiplo de ese número.

Sea el número 4 que divide a 8, 12 y 20. Luego:

$$8 = \dot{4}; \qquad 12 = \dot{4}; \qquad 20 = \dot{4}$$

Según la fig. 8 podemos escribir las siguientes igualdades:

$$8 + 12 + 20 = 4 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 5 = 4(2+3+5) = 4 \times 10 = 40$$

De modo que $40 = \dot{4}$, por ser 40 el resultado de multiplicar 4 por un número natural, 10.

Análogamente, veríamos:

2. La diferencia entre dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

EJEMPLO: $35 = \dot{5}$ y $20 = \dot{5}$. $\therefore\ 35 - 20 = 15 = \dot{5}$.

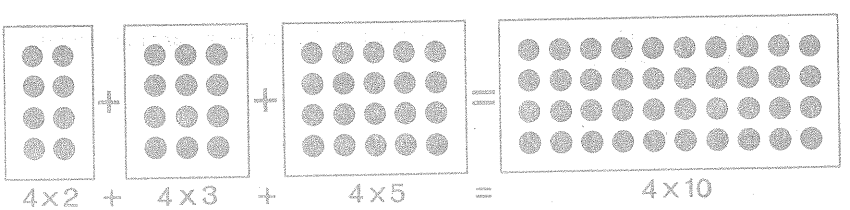


FIG. 8. — El conjunto formado con 4 filas de 10 botones contiene igual número de éstos que la suma de conjuntos de 2, 3 y 5 filas de 4 botones.

31. Operación de sacar factor común.

Según vimos en el número anterior, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$5 \times 7 + 8 \times 7 + 12 \times 7 = 7(5+8+12)$$
$$17 \times 11 - 5 \times 11 = 11(17-5)$$

De ellas deducimos una regla para sacar factor común:

Cuando en una suma, o en una diferencia, todos los términos tienen un factor común, puede ponerse éste de manifiesto escribiéndolo como factor de un paréntesis, en cuyo interior se escribe el resultado de dividir cada término de la suma, o de la diferencia, por el factor común.

EJEMPLOS: $12 + 21 + 15 = 3\,(4+7+5)$; $\quad 63 - 28 = 7\,(9-4)$

$5\,ax + 2\,bx + x = x\,(5a+2b+1)$; $\quad ay - by = y\,(a-b)$.

32. Caso en que todos los sumandos, menos uno, son múltiplos de un número.

Sean los números 28, 42 y 64.

Los dos primeros son múltiplos de 7. Es decir:

$$28 = \dot{7} = 7 \times 4$$

$$42 = \dot{7} = 7 \times 6$$

Pero 64 si lo dividimos por 7 nos da de cociente 9 y resto 1. Es decir:

$$64 = 7 \times 9 + 1 = \dot{7} + 1$$

Reuniendo las unidades de los tres sumandos en conjuntos análogos a los de la fig. 8, veríamos que su suma es:

$$28 + 42 + 64 = 7 \times 4 + 7 \times 6 + 7 \times 9 + 1 =$$

$$= 7\,(4+6+9) + 1 = 7 \times 19 + 1 = \dot{7} + 1$$

O sea, que la división de la suma por 7, nos da de cociente 19 y de **resto 1.**

Si varios sumandos son todos, menos uno, múltiplos de un número, la división de la suma por el número no es exacta, y su resto es el mismo que el que resulta de dividir por dicho número el sumando no múltiplo.

33. Aplicación a la división entera.

Si repartimos 300 ptas. entre 18 niños, les toca 16 pesetas a cada uno, y quedan de resto 12 ptas.

Por definición de división sabemos que

$300 = 18 \times 16 + 12$ o bien $300 - 18 \times 16 = 12$

De aquí deducimos la consecuencia:

En una división, si el dividendo y el divisor son múltiplos de un número, el resto también lo será.

En efecto:

$$300 = \dot{3}; \qquad 18 = \dot{3} \qquad \therefore \quad 18 \times 16 = \dot{3}$$

y por (30, 2): $12 = \dot{3}$

como se quería probar.

EJERCICIOS

125. Hallar los divisores de 5, de 18, de 21. ¿Cómo se calculan?

126. ¿Cuál es el menor múltiplo de 12? ¿Y su mayor divisor?

127. Hallar los seis primeros múltiplos de 13. ¿Cómo se calculan?

128. Hallar los nueve primeros múltiplos de 201.

129. Los múltiplos de 12, ¿lo son de 4? Y los de 4, ¿lo son de 12?

130. Hallar los múltiplos de 27 comprendidos entre 800 y 1.000.

131. ¿Cuáles de los números de cuatro cifras son múltiplos de 92?

132. En la igualdad $5 \times 9 \times 17 = 765$, dígase qué números son múltiplos y cuáles divisores, y de qué números.

133. Sabiendo que 60 es múltiplo de 12, de 15 y de 20, hállense otros cinco múltiplos comunes de estos tres números. ¿En qué teorema se basa este ejercicio?

134. Efectuar los productos siguientes, empleando dos métodos distintos:

$$(7+9+13+18)\,5; \qquad (17-9)\,3; \qquad (54-31)\,6$$

135. Sacar factor común en las expresiones siguientes:

$$2ab + ac + a; \qquad 7x - 3ax; \qquad y - by$$

136. En la suma $S = 14 + 35 + 84$, los sumandos son todos múltiplos de 7, ¿lo será S? Compruébese.

137. Demostrar que todo número que divide a una diferencia y al sustraendo, divide también al minuendo.

138. La diferencia $143 - 104$, ¿será divisible por 13? Razonar la respuesta.

139. Demostrar que todo número que divide al divisor y al resto de una división divide también al dividendo.

4. Divisibilidad (continuación)

34. Caracteres o criterios de divisibilidad. — Interesa muchas veces averiguar si un número es múltiplo de otro sin practicar la división. Para algunos divisores, esto se consigue haciendo uso de ciertas reglas llamadas *caracteres* o *criterios de divisibilidad.*

Caracteres o criterios de divisibilidad son, pues, reglas que permiten conocer, sin efectuar la división, cuándo un número es divisible por otro.

35. Divisibilidad por 10, por 100, por 1.000, etc.

Un número es divisible por 10, por 100, por 1.000, etc., cuando termina en uno, dos, tres, etc., ceros, respectivamente.

En efecto. Todo número terminado en cero se puede descomponer siempre en un producto formado por 10 y otro número natural, y, por tanto, 10 es divisor de dicho producto (núm. 27, 5.ª).

Del mismo modo, todo número terminado en dos, tres, etc., ceros, puede descomponerse en un producto de dos factores, uno de los cuales es 100, 1.000, etc., y el otro un número natural. Luego, el número en cuestión será divisible por 100, 1.000, etc., respectivamente.

EJEMPLOS:

$$170 = 17 \times 10 = \text{múltiplo de } 10$$
$$5.400 = 54 \times 100 = \text{múltiplo de } 100$$
$$268.000 = 268 \times 1.000 = \text{múltiplo de } 1.000$$

36. Divisibilidad por 2 y por 5.

Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o en cifra par. Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en cinco.

Primeramente, observemos que si un número termina en cero, por ser múltiplo de $10 = 2 \times 5$, lo será también de 2 y de 5 (núm. 29).

Consideremos ahora un número no terminado en cero, como 479, el cual podremos descomponer en una suma de dos sumandos, uno de ellos terminado en cero:

$$479 = 470 + 9$$

El primer sumando, 470, es divisible por 10, y, por consiguiente, también por 2 y por 5; luego, según el párrafo 30, si el otro sumando fuera múltiplo de 2 o de 5, también lo sería la suma.

Es decir: el que un número sea o no divisible por 2 o por 5, depende solamente de la cifra de sus unidades y, por tanto, quedan justificadas las reglas dadas más arriba.

EJEMPLOS:

Son múltiplos de 2: 340, 132, 1.574, 76, 138
Son múltiplos de 5: 170, 65, 3.305, 1.005.

37. Divisibilidad por 4 y por 25.

Un número es divisible por 4 cuando termina en dos ceros, o cuando sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4.

Un número es divisible por 25 cuando termina en dos ceros, o cuando sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 25.

Observemos, en primer lugar, que si un número termina en dos ceros, por ser múltiplo de $100 = 4 \times 25$, lo será también de 4 y de 25 (número 29).

Sea ahora un número, como 1.317, no terminado en dos ceros. Lo podremos descomponer del siguiente modo:

$$1.317 = 1.300 + 17$$

El sumando 1.300 es divisible por 100, y, en consecuencia, por 4 y por 25; luego (núm. 30), si el otro sumando fuera múltiplo de 4 o de 25, también lo sería la suma.

Por tanto: el que un número sea o no divisible por 4 o por 25, depende exclusivamente de sus dos últimas cifras, por lo que quedan justificadas las reglas arriba expuestas.

EJEMPLOS:

Son múltiplos de 4: 748, 1.312, 5.036, 3.760
Son múltiplos de 25: 5.800, 2.350, 9.325, 1.775.

38. Divisibilidad por 8 y por 125. — Razonando de forma parecida y teniendo en cuenta que $1.000 = 8 \times 125$, deduciríamos que

La condición para que un número sea divisible por 8, o por 125, es que las tres últimas cifras sean ceros o formen un múltiplo de 8, o de 125, respectivamente.

39. Divisibilidad por 9.

Un número es divisible por 9, cuando lo es la suma de sus cifras.

La demostración de esta regla se basa en las dos proposiciones siguientes:

1.ª *La unidad seguida de ceros, dividida por 9, da siempre 1 de resto.* En efecto:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 9 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 9 \\ 10 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1000 & 9 \\ 10 & 111 \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

Las anteriores divisiones, todas ellas inexactas, podremos expresarlas del modo siguiente:

$$10 = \dot{9} + 1, \qquad 100 = \dot{9} + 1, \qquad 1.000 = \dot{9} + 1$$

2.ª *Un número formado por una cifra significativa seguida de ceros, es igual a un múltiplo de 9 más esa misma cifra.*

Sean, por ejemplo, los números 30 y 500. Fácilmente se comprenden las siguientes igualdades:

$$30 = 3 \times \quad 10 = 3\,(\dot{9}+1) = \dot{9} + 3$$
$$500 = 5 \times 100 = 5\,(\dot{9}+1) = \dot{9} + 5$$

Consideremos ahora un número cualquiera, como 6.872. Descompongámoslo en la suma de sus cifras seguidas de ceros:

$$6.872 = 6.000 + 800 + 70 + 2$$

Según lo que acabamos de decir, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} 6.000 &= \dot{9} + 6 \\ 800 &= \dot{9} + 8 \\ 70 &= \dot{9} + 7 \\ 2 &= \quad 2 \end{aligned}\right\}$$

Sumando m. a m. estas igualdades y teniendo en cuenta que la suma de varios múltiplos de 9 es otro múltiplo de 9, resulta:

$$6.872 = \dot{9} + (6+8+7+2)$$

Vemos que el número en cuestión es igual a una suma de dos sumandos, el primero de los cuales es un múltiplo de 9. Si el segundo sumando, 6 + 8 + 7 + 2, fuera múltiplo de 9, lo sería la suma y, por consiguiente, el número dado 6.872. Recíprocamente, si la suma, es decir, el número, fuera múltiplo de 9, como también lo es un sumando, lo sería el otro.

El razonamiento seguido es aplicable a cualquier número, por lo que queda justificada la regla arriba enunciada.

EJEMPLOS:

Son divisibles por 9 los números 576, 1.125 y 77.598, porque lo son las sumas

$5 + 7 + 6 = 18$, $\quad 1 + 1 + 2 + 5 = 9$ y $\quad 7 + 7 + 5 + 9 + 8 = 36$

40. Divisibilidad por 3

Un número es divisible por 3, cuando lo es la suma de sus cifras.

La demostración de esta regla se hace de igual modo que la referente a la divisibilidad por 9. Como entonces, podemos enunciar:

1.º *La unidad seguida de ceros, dividida por* 3, *da siempre* 1 *de resto.*

2.º *Un número formado por una cifra significativa seguida de ceros es igual a un múltiplo de* 3 *más esa misma cifra.*

EJEMPLOS. — Son múltiplos de 3 los números 3.684, 9.045 y 327.534, porque lo son las sumas

$3 + 6 + 8 + 4 = 21$, $\quad 9 + 4 + 5 = 18$ y $\quad 3 + 2 + 7 + 3 + 5 + 4 = 24$

41. Divisibilidad por 11.

Un número se divisible por 11, cuando sumadas las cifras de lugar impar y, separadamente, las de lugar par, sucede que la diferencia de esas dos sumas es cero o múltiplo de 11.

Si la resta no es posible en un sentido, se efectúa en el opuesto.

Para demostrar esta regla, comenzaremos por establecer las tres proposiciones siguientes:

1.ª *La unidad seguida de un número* PAR *de ceros, dividida por* 11, *da* 1 *de resto.* Efectivamente:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ 1 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10000 & 11 \\ 100 & 909 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1000000 & 11 \\ 100 & 90909 \\ 100 & \\ 1 & \end{array}$$

De estas divisiones se deducen las igualdades siguientes:

$$100 = \dot{11} + 1, \qquad 10.000 = \dot{11} + 1, \qquad 1{,}000.000 = \dot{11} + 1$$

2.ª *La unidad seguida de un número* IMPAR *de ceros, dividida por* 11, *da* 10 *de resto por defecto, y* 1 *de resto por exceso.* En efecto:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 11 \\ 10 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1000 & 11 \\ 10 & 90 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100000 & 11 \\ 100 & 9090 \\ 10 & \end{array}$$

Los restos por defecto son todos 10, y los restos por exceso, 1. Luego, si tomamos los restos por exceso, podremos escribir las siguientes igualdades:

$$10 = \dot{11} - 1, \qquad 1.000 = \dot{11} - 1, \qquad 100.000 = \dot{11} - 1$$

3.ª *Un número formado por una cifra significativa seguida de ceros, es igual a un múltiplo de* 11 *más o menos el valor de esa misma cifra, según sea* PAR *o* IMPAR *el número de ceros que la acompañan.*

Sean, por ejemplo, los números 500 y 6.000. Se tiene:

$$500 = 5 \times \quad 100 = 5(\dot{11} + 1) = \dot{11} + 5$$

$$6.000 = 6 \times 1.000 = 6(\dot{11} - 1) = \dot{11} - 6$$

Consideremos ahora un número cualquiera, como 72.586. Descompongámoslo en la suma de sus cifras seguidas de ceros:

$$72.586 = 70.000 + 2.000 + 500 + 80 + 6$$

Según lo que acabamos de decir, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} 70.000 &= \dot{11} + 7 \\ 2.000 &= \dot{11} - 2 \\ 500 &= \dot{11} + 5 \\ 80 &= \dot{11} - 8 \\ 6 &= \quad 6 \end{aligned}\right\}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y teniendo en cuenta que la suma de varios múltiplos de 11 es otro múltiplo de 11, resulta:

$$72.586 = \dot{11} + [(7+5+6) - (2+8)]$$

Vemos que 72.586 es el resultado de sumar a un múltiplo de 11 el valor de la diferencia $(7+5+6) - (2+8)$. Por consiguiente, si esta diferencia fuera múltiplo de 11, también lo sería el número considerado. Recíprocamente, si el número fuera múltiplo de 11, lo sería también la diferencia antes mencionada.

Obsérvese que la diferencia en cuestión $(7+5+6) - (2+8)$, tiene por minuendo la suma de las cifras que ocupan lugar impar en el número 72.586, y por sustraendo, la suma de las cifras de lugar par.

Como sucede en el número 28.173, puede ocurrir que la suma de las cifras de lugar impar $(2+1+3)$, sea menor que la suma de las cifras de lugar par $(8+7)$. En tal caso, tendríamos:

$$28.173 = \dot{11} + [(2+1+3) - (8+7)] = \dot{11} - [(8+7) - (2+1+3)]$$

y de acuerdo con el párrafo 30, 2, diríamos que el número 28.173 será o no múltiplo de 11, según lo sea la diferencia $(8+7) - (2+1+3)$.

Queda, por tanto, justificada la regla dada al principio.

EJEMPLOS. — Son múltiplos de 11 los números 2.563, 6.908 y 1.809.170, por serlo las diferencias

$$(2+6) - (5+3) = 0, \qquad (9+8) - 6 = 11, \qquad (8+9+7) - (1+1) = 22$$

EJERCICIOS

140. Indicar, sin efectuar la división, cuáles de los números 517, 862, 2.756 y 67.000, son divisibles por 2, cuáles por 4, y cuáles lo son por 8.

141. Teniendo en cuenta la regla dada en el párrafo 14, decir si son bisiestos los años siguientes: 1960, 1910, 1492, 2000 y 1900.

142. Indicar, sin efectuar la división, cuáles de los números 495, 275, 750, 925, 2.652 y 71.000, son múltiplos de 5, cuáles de 25, y cuáles de 125.

143. Dados los números 84, 231, 1.278, 92.506 y 111.222.333, expresar cuáles son múltiplos de 3 y cuáles lo son de 9.

144. Aplicando el carácter de divisibilidad, indicar cuáles de los siguientes números son múltiplos de 11: 9.229, 742.951, 40.304 y 453.709.234.

145. Demostrar que la diferencia entre dos números formados por las mismas cifras, pero escritas en distinto orden, es un múltiplo de 9.

146. Demostrar que el producto de dos números consecutivos, es siempre divisible por 2.

147. Sustituir los puntos por cifras en $83 \cdot 5 \cdot 23 \cdot$ de manera que resulte un número divisible: 1.º, por dos; 2.º, por tres; 3.º, por once.

148. En $57 \cdot 2 \cdot$ sustitúyanse los puntos por cifras, de modo que resulte un número múltiplo, a la vez, de 3 y de 5. Hallar tres soluciones.

149. Sustituir los puntos por cifras en $285 \cdot \cdot$ de manera que el número que resulte sea, a la vez, múltiplo de 4 y de 9. Dar tres soluciones.

150. Sustituir los puntos por cifras en $5 \cdot 7 \cdot$ de manera que el número que resulte sea, a la vez, múltiplo de 5 y de 11. Dar las soluciones posibles.

151. Sustituir los puntos por cifras en $37 \cdot \cdot 5$ de modo que resulte un número divisible, a la vez, por 9 y por 11. ¿Cuántas soluciones hay?

152. Demostrar que si a la izquierda de una cifra se escribe el duplo de su valor, se obtiene un múltiplo de 7.

153. La suma de tres números consecutivos es un múltiplo de 3. Demostrarlo.

5. Números primos

42. Números primos y números compuestos. — *Número primo, o simple, es el que sólo tiene por divisores a sí mismo y a la unidad.*

EJEMPLO. — Los números primos menores que 100, son:

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97

Número compuesto es el que tiene otros divisores distintos de sí mismo y de la unidad.

EJEMPLO. — Son compuestos los números 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... El 2 es primo, pero todos los números pares mayores que 2 son compuestos, ya que se obtienen multiplicando a 2 por otro factor mayor que 1.

43. Tabla de números primos, o criba de Eratóstenes [1] — Para hallar los números primos inferiores a un número determinado, seguiremos la siguiente REGLA:

1.° *Se escriben los números* 1 *y* 2 *y todos los impares inferiores al límite asignado. Al no escribir los números pares, quedan por este hecho eliminados todos los múltiplos de* 2.

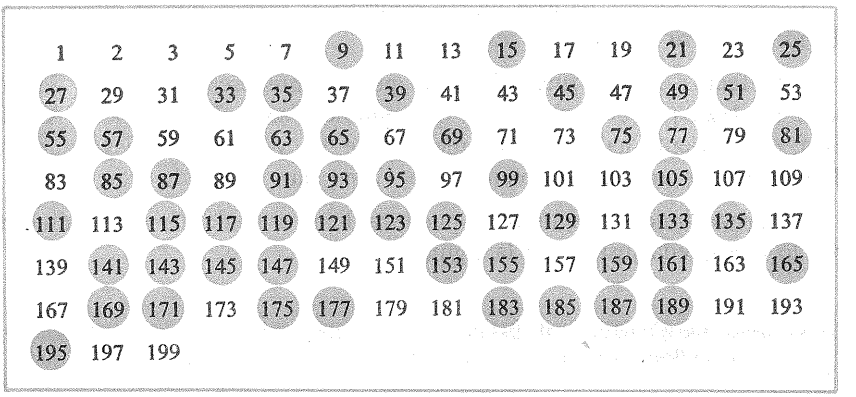
2.° *Se tacha el cuadrado de* 3 *y todos los números que se hallan a continuación, contando de tres en tres, y así desaparecen todos los múltiplos de* 3.

3.° *Se tacha el cuadrado de* 5 *y todos los números que se hallan a continuación, contando de cinco en cinco, desapareciendo así todos los múltiplos de* 5.

4.° *Se tacha el cuadrado de* 7 *y todos los números que se hallan después de él, contando de siete en siete, con lo cual desaparecen todos los múltiplos de* 7.

Se continúa del mismo modo hasta llegar a un número primo cuyo cuadrado sea mayor que el límite de la tabla. Los números que quedan sin tachar, son primos.

(1) ERATÓSTENES, matemático y astrónomo griego, nacido en Cirene hacia el año 275 antes de Jesucristo



1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81
83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109
111	113	115	117	119	121	123	125	127	129	131	133	135	137
139	141	143	145	147	149	151	153	155	157	159	161	163	165
167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187	189	191	193
195	197	199											

Eratóstenes agujereó los lugares correspondientes a los números no primos, quedando la tabla reducida a una auténtica criba. Los que están sin tachar son los números primos inferiores a 200.

44. TEOREMA. — **El menor divisor (distinto de la unidad) de un número compuesto, es primo.** — Sea *n*, por ejemplo, un número compuesto y *a* su menor divisor. Demostramos que *a* es primo.

En efecto: si *a* no fuera primo, sería compuesto y en consecuencia tendría un divisor menor que él. Pero este divisor de *a*, lo sería a su vez de *n*, en cuyo caso *a* no sería el menor divisor de *n*, lo cual se opone a lo que hemos supuesto.

EJEMPLO. — El menor divisor de un número no puede ser 6, porque si dicho número es múltiplo de 6, lo será de 2 y de 3, y 2 y 3 son primos.

45. **Modo de conocer si un número es primo o compuesto.** — Consideremos, por ejemplo, el número 397 y tratemos de averiguar si es primo o compuesto.

Según los caracteres de divisibilidad, vemos inmediatamente que 397 no es divisible por los primos 2, 3, 5 y 11.

Tampoco la división por 7 es exacta.

Veamos lo que sucede con los demás números primos, 13, 17, etc.

397	13
07	30

397	17
57	23
6	

397	19
17	20

397	23
167	17
06	

Como el cociente de esta última división es menor que el divisor, *podemos asegurar ya que* 397 *es primo.*

En efecto: si 397 fuera divisible por un número mayor que 23, lo sería también por el cociente, ya que entonces sería $397 = d \times c$. Ahora bien, ese cociente habría de ser menor que 17, y hemos visto ya que las divisiones por un número menor que 17 no han resultado exactas.

El procedimiento seguido se puede aplicar a cualquier otro número, por lo que queda justificada la siguiente regla:

Es primo un número, si al dividirle por la serie de números primos 2, 3, 5, 7, etc. se llega, sin obtener división exacta, a un cociente igual o menor que el divisor.

46. TEOREMA: **La sucesión de números primos es ilimitada.**— Sea n un número primo, que se puede suponer todo lo grande que se quiera. Vamos a demostrar que existe otro mayor que él.

En efecto: formemos el producto de todos los números primos desde 2 hasta n, y sumemos a este producto una unidad. Tendremos:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times \ldots \times n) + 1 = S$$

Si la suma S es número primo, el teorema está demostrado, pues evidentemente $S > n$. Si S no es primo, admitirá un factor primo (núm. 44), que no podrá ser ninguno de los comprendidos en el paréntesis, pues de lo contrario, dicho factor, por dividir a la suma S y al primero de los sumandos, dividiría al otro, que es la unidad, lo cual es absurdo. Luego, el factor en cuestión será mayor que cualquiera de los comprendidos en el paréntesis, y, por tanto, mayor que n.

47. Descomposición de un número en producto de factores primos.— Sea, por ejemplo, el número 3.185. Según el párrafo 44, tendrá cuando menos un factor primo, por lo que al dividir por la serie 2, 3, 5, 7, etc., se obtendrá algún cociente exacto.

El primer número primo que le divide es 5, resultando

$$3.185 : 5 = 637 \qquad \text{de donde} \qquad 3.185 = 5 \times 637$$

Con 637 podemos razonar del mismo modo, si bien no es necesario ya probar la división por 2 y por 3, pues vimos que estos números no eran divisores de 3.185. El menor divisor de 637 es 7, obteniéndose

$$637 : 7 = 91 \qquad \text{es decir} \qquad 637 = 7 \times 91$$

Teniendo en cuenta este valor de 637, la igualdad $3.185 = 5 \times 637$ se transforma en esta otra:

$$3.185 = 5 \times 7 \times 91$$

Los factores 5 y 7 son primos y 91 es compuesto. El divisor primo más pequeño de 91 es 7, resultando

$$91 : 7 = 13 \qquad \text{y} \qquad 91 = 7 \times 13$$

Como el cociente hallado, 13, es primo, el número 3.185 aparece descompuesto en un producto de factores, *todos primos*, que son:

$$3.185 = 5 \times 7 \times 7 \times 13 = 5 \times 7^2 \times 13$$

El razonamiento seguido es aplicable a cualquier otro número, por lo que podremos enunciar la siguiente regla:

Para descomponer un número compuesto en producto de factores primos, se halla su menor divisor primo y se divide el número por él; el cociente de esta división se divide por su menor divisor primo y así se continúa, dividiendo cada cociente por su menor divisor primo, hasta llegar a un cociente igual a la unidad. Los divisores empleados son los números primos cuyo producto equivale al número dado.

EJEMPLO. — Descomponer el número 9.576 en sus factores primos.

DISPOSICIÓN PRÁCTICA

9576	2
4788	2
2394	2
1197	3
399	3
133	7
19	19
1	

$9.576 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 19$

DIREMOS ASÍ: 9.576 es divisible por 2: mitad de 9, 4; mitad de 15, 7; mitad de 17, 8; mitad de 16, 8.

4.788 es divisible por 2: mitad de 4, 2; mitad de 7, 3; mitad de 18, 9; mitad de 8, 4.

2.394 es divisible por 2: mitad de 2, 1; de 3, 1; de 19, 9; de 14, 7.

1.197 es divible por 3: tercio de 11, 3; de 29, 9; de 27, 9.

399 es divisible por 3: tercio de 3, 1; de 9, 3; de 9, 3.

133 es divisible por 7: séptimo de 13, 1; de 63, 9.

19 es primo.

Se ha dicho en la regla anterior que para descomponer un número en producto de factores primos, se divide el número y cada uno de los sucesivos cocientes por su menor factor primo. Al proceder así, obtenemos ordenados los factores primos de menor a mayor. Pero no es condición indispensable comenzar por los factores primos menores; porque, cualquiera que sea el orden y el método que se siga, se obtendrán siempre los mismos factores primos, afectados de idénticos exponentes. Esta propiedad se enuncia diciendo: *Un número no admite más que una descomposición en factores primos.*

Basados en esto, cuando se trata de un número en el que se ve inmediatamente una descomposición en dos o más factores, es preferible aprovecharla, descomponiendo cada uno de ellos en factores primos.

EJEMPLO. — La descomposición del número 4.800 la haremos así:

$$4.800 = 48 \times 100 = 6 \times 8 \times 2^2 \times 5^2 = 2 \times 3 \times 2^3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^6 \times 3 \times 5^2$$

48. Condición de divisibilidad de un número por otro, descompuestos entre sí. Aplicación. — TEOREMA.

La condición necesaria y suficiente para que la división de dos números descompuestos en sus factores primos, sea exacta, es que el dividendo contenga todos los factores primos del divisor, con exponentes iguales o mayores.

Para probarlo, supongamos que el dividendo es $2^5 \times 3^4 \times 7 \times 11^2$ y el divisor, $2^3 \times 3^2 \times 11$.

Teniendo en cuenta que los factores del divisor están contenidos en el dividendo, y que este último puede también escribirse así:

$$2^5 \times 3^4 \times 7 \times 11^2 = 2^2 \times 2^3 \times 3^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \times 11 =$$
$$= (2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11) \times (2^3 \times 3^2 \times 11)$$

vemos cómo, en efecto, la división será exacta, ya que el dividendo es igual a un producto de dos factores, el segundo de los cuales es igual al divisor.

EJEMPLO. — El número $17.640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$, será divisible por el número $126 = 2 \times 3^2 \times 7$; no lo es, en cambio, por $2 \times 3^3 \times 7$, ni por $2^2 \times 3 \times 5^2$.

49. Números primos entre sí. — *Decimos que dos o más números son primos entre sí, cuando no tienen más divisor común que la unidad.*

EJEMPLO. — Son primos entre sí los números 8, 10 y 15, aunque separadamente sean compuestos. En efecto: entre los respectivos divisores:

1, 2, 4 y 8; 1, 2, 5 y 10; 1, 3, 5 y 15

el único común es el 1.

50. Divisibilidad de un número por un producto de factores primos ambos en sus factores primos. — *Si un número es divisible por varios factores primos entre sí, considerados dos a dos, es divisible por su producto.*

Supongamos un número n que sea divisible por 4, por 15 y por 77. Estos tres números, primos entre sí dos a dos, equivalen respectivamente a

$$4 = 2^2, \qquad 15 = 3 \times 5, \qquad 77 = 7 \times 11.$$

Por ser n divisible por 4, contiene el factor 2 con exponente igual o superior a 2; por ser divisible por 15, contiene los factores 3 y 5; y por ser divible por 77, contiene los factores 7 y 11.

Ahora bien: por ser primos entre sí dos a dos los números 4, 15 y 77, los factores primos de cada uno son distintos de los otros dos; en consecuencia, el número n contiene a los factores del producto.

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

con exponentes iguales o mayores a los que llevan en dicho producto. Luego, n es divisible por el producto $4 \times 15 \times 77$, como se quería demostrar.

APLICACIÓN. — Basados en el teorema que acabamos de demostrar, podemos establecer nuevos caracteres de divisibilidad. Así, diremos:

Un número es divisible por 6 cuando lo es por 2 y por 3.
Un número es divisible por 12 cuando lo es por 3 y por 4.
Un número es divisible por 14 cuando lo es por 2 y por 7.
Un número es divisible por 15 cuando lo es por 3 y por 5.

EJERCICIOS

154. ¿Qué divisores tiene un número primo?

155. ¿Cuántos divisores ha de tener por lo menos un número compuesto?

156. ¿Cuál es el único número par que es primo?

157. Dos números consecutivos, ¿pueden ser primos? ¿Por qué?

158. Un número cuyas cifras suman 36, ¿es primo? ¿Por qué?

159. Formar una tabla de números primos hasta el 300. ¿En qué momento detendrás la operación de tachar números?

160. ¿Puede ser 9 el menor divisor de un número compuesto? ¿Por qué?

161. De entre los números 989, 1.087, 1.103, 2.339, 64.987 y 122.951, hallar los que son primos y los que son compuestos, indicando en éstos cuáles son sus menores divisores primos (distintos de 1).

162. Descomponer en sus factores primos los números 900, 1.925, 1.008, 11.913, 111.111 y 323.640.

163. ¿Es divisible el número $335.160 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 19$ por el número $1.140 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 19$? ¿Cuál será el cociente? Comprobarlo, efectuando la división.

6. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

51. Divisores comunes de dos o más números. — Si halláramos los respectivos divisores de los números 24, 56 y 64, obtendríamos los siguientes:

De 24: **1, 2,** 3, **4,** 6, **8,** 12, 24.
De 56: **1, 2, 4,** 7, **8,** 14, 28, 56.
De 64: **1, 2, 4, 8,** 16, 32, 64.

Los números 1, 2, 4 y 8, que son divisores de los tres números, se llaman *divisores comunes* de 24, 56 y 64.

52. Máximo común divisor. — *Se llama máximo común divisor de dos o más números, al mayor de los divisores comunes, distinto de la unidad.*

El máximo común divisor de varios números, se indica con las iniciales m. c. d., escritas delante de un paréntesis que lleva encerrados a dichos números. Así, pondremos, por ejemplo,

$$\text{m. c. d. } (24,\ 56 \text{ y } 64) = 8$$

que se lee: *máximo común divisor de* 24, 56 *y* 64 *es igual a* 8.

53. Observación. — *En el caso particular de que entre los números considerados haya uno que sea divisor de los demás, dicho número será el m. c. d. de todos ellos.*

En efecto: el tal número es divisor de sí mismo y de todos los restantes. Es además el mayor posible, ya que ningún divisor de un número es mayor que el propio número.

EJEMPLO. — El m. c. d. (48, 16 y 112) = 16, puesto que 16 divide a 48 y a 112.

54. Obtención del m. c. d. de varios números.

Para hallar el m. c. d. de varios números, procederemos como sigue:

1.º Se descomponen los números en sus factores primos.

2.º Se forma un producto con los factores primos comunes, tomado cada uno de ellos con el menor exponente con que figure en los distintos números.

Ese producto es el m. c. d. buscado.

EJEMPLO. — Hallar el m. c. d. (3.920, 15.400 y 13.860).

1.º Descompongamos los números en sus factores primos. Tendremos:

$$3.920 = 2^4 \times 5 \times 7^2; \qquad 15.400 = 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11;$$
$$13.860 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

2.º Hallemos el producto de los factores comunes, afectados de su menor exponente. Resulta: $2^2 \times 5 \times 7 = 140$. Según esto, el

$$\text{m. c. d. } (3.920,\ 15.400 \text{ y } 13.860) = 2^2 \times 5 \times 7 = 140$$

En efecto: el número así obtenido es, desde luego, divisor de todos los números dados, puesto que cumple con cada uno de ellos la condición de divisibilidad (núm. 50). Además, es el mayor de los divisores comunes a dichos números, porque otro cualquiera mayor que él, o tendrá algún factor primo distinto de los comunes o los factores comunes estarán afectados de exponentes mayores, y en ambos casos dejará de ser divisor de los números considerados, según el párrafo 50.

55. Propiedades. — 1.ª *Todo número que divide a otros varios, divide también a su máximo común divisor.*

Sean, por ejemplo, los mismos números considerados en el párrafo anterior. Decimos que todo divisor común de 3.920, 15.400 y 13.860, lo es también de su m. c. d., 140.

En efecto: según la condición de divisibilidad (núm. 49), un número que divida al mismo tiempo a 3.920, 15.400 y 13.860, no puede constar de otro factor primo distinto de 2, 5 y 7, ni estar éstos afectados de exponentes superiores a 2, 1 y 1, respectivamente, lo cual significa que el tal número será divisor de 140, como queríamos probar.

2.ª *Si se multiplican varios números por un mismo número, el máximo común divisor queda multiplicado por ese mismo número.*

Supongamos tres números a, b y c, que, descompuestos en sus factores primos, dan

$$a = 2^2 \times 3 \times 7^2; \qquad b = 2^3 \times 3^2 \times 7; \qquad c = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

Su máximo común divisor será $2^2 \times 3 \times 7$.

Si a esos números los multiplicamos por 5, por ejemplo, obtendremos:

$$a \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2; \qquad b \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7;$$
$$c \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

y el máximo común divisor se habrá convertido en $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$, que está obtenido multiplicando por 5 el m. c. d. antes hallado.

56. Múltiplos comunes de dos o más números. — Hallemos múltiplos de los números 4, 6 y 12 multiplicando para ello a dichos números por la serie natural, 1, 2, 3, etc. Obtendremos:

De 4:	4,	8,	**12,**	16,	20,	**24,**	28,	32,	**36,** ...
De 6:	6,	**12,**	18,	**24,**	30,	**36,**	42,	48,	54, ...
De 12:	**12,**	**24,**	**36,**	48,	60,	72,	84,	96,	108, ...

Los números 12, 24, 36, ..., que son múltiplos de 4, 6 y 12, se llaman *múltiplos comunes* de dichos números.

57. Mínimo común múltiplo. — *Se llama mínimo común múltiplo de dos o más números, al menor de los múltiplos comunes de dichos números.*

Para indicarlo, se emplean las iniciales m. c. m., colocadas delante de un paréntesis en el que se escriben los números de que se trata. Así, pondremos, por ejemplo,

$$\text{m. c. m. } (8,\ 10 \text{ y } 15) = 120$$

que se lee: *mínimo común múltiplo de* 8, 10 *y* 15 *es igual a* 120.

58. Observación. — *En el caso particular de que entre los números considerados haya uno que sea múltiplo de los demás, dicho número será el m. c. m. de todos ellos.*

En efecto: dicho número es múltiplo de sí mismo y de todos los restantes. Es además el menor posible, puesto que ningún múltiplo de un número puede ser menor que ese número.

EJEMPLO. — El m. c. m. (14, 42 y 252) = 252, pues 252 es múltiplo de 14 y de 42.

59. Obtención del m. c. m. de varios números.

Para hallar el m. c. m. de varios números, procederemos como sigue:

1.° Se dsecomponen los números en sus factores primos.

2.° Se forma un producto con los factores primos comunes y no comunes, tomado cada uno de ellos con el mayor exponente con que figure en los distintos números.

El producto así obtenido será el m. c. m. buscado.

EJEMPLO. — Hallar el m. c. m. de 1.638, 2.520 y 2.860.

1.° Al descomponer estos números en sus factores primos, resulta:

$$1.638 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 13; \quad 2.520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7; \quad 2.860 = 2^2 \times 5 \times 11 \times 13$$

2.° El producto de los factores primos comunes y no comunes, con su mayor exponente, es $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 360.360$. Luego,

$$\text{m. c. m. } (1.638,\ 2.520 \text{ y } 2.860) = 360.360$$

En efecto: el número que se obtiene al aplicar la regla anterior, es, desde luego, múltiplo de todos los números dados, puesto que cumple con cada uno de ellos la condición de divisibilidad (núm. 50). Pero, además, es el menor de los múltiplos comunes, porque cualquiera otro número menor que él, o carecerá de alguno de los factores primos de los números considerados o tendrá alguno de ellos con exponente inferior al que lleva en el producto formado para hallar el m. c. m.; en ambos casos, el tal número no podrá ser múltiplo común, de acuerdo con el párrafo 50.

60. Propiedades. — 1.ª *Todo múltiplo común de varios números es múltiplo del m. c. m. de dichos números.*

Consideremos los mismos números del ejemplo anterior. Decimos que todo múltiplo común de 1.638, 2.520 y 2.860, lo es también de su

$$\text{m. c. m.} = 360.360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13.$$

En efecto: según la condición de divisibilidad (49), todo múltiplo común de los números dichos ha de tener los factores primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13, con exponentes iguales o mayores que los que llevan en aquellos números, lo cual significa que dicho múltiplo lo es también del m. c. m.

2.ª *Si se multiplican varios números por un mismo número, el m. c. m. queda multiplicado por dicho número.*

Sean tres números *a*, *b* y *c*, que, descompuestos en sus factores primos, dan

$$a = 2^2 \times 3 \times 7^2, \qquad b = 2^3 \times 3^2 \times 7, \qquad c = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

Su mínimo común múltiplo será $2^4 \times 3^2 \times 7^2 \times 11$.

Multiplicando a esos números por 5, por ejemplo, obtendremos:

$$a \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2; b \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7; c \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

y el m. c. m. se habrá convertido en $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$, que está obtenido multiplicando por 5 el m. c. m. antes hallado.

3.ª *El resultado de multiplicar el m. c. m. de dos números por su m. c. d., es igual al producto de los números dados.*

En efecto: basta tener en cuenta que el m. c. d. está formado por los factores primos comunes con los *menores* exponentes y el m. c. m. contiene los comunes con los *mayores* exponentes y además los *no comunes*. Luego, el producto contiene *todos* los factores primos de los dos números dados, siendo igual, por consiguiente, al producto de dichos números.

REGLA. — *Para hallar el m. c. m. de dos números, se divide el producto de éstos por su m. c. d., o lo que es más breve, se multiplica uno de los números por el cociente de dividir el otro por el m. c. d. de ambos.*

EJEMPLO. — Hallar el m. c. m. de 504 y 924.

Como

$$\text{m. c. d. } (504 \text{ y } 924) = 84$$

tendremos:

$$\text{m. c. m. } (504 \text{ y } 924) = \frac{504 \times 924}{84} = 504 \times \frac{924}{84} = 924 \times \frac{504}{84} = 5.544.$$

61. Formación de todos los divisores de un número. — Sea, por ejemplo, el número 360. Descompongámosle en factores primos:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Según la condición de divisibilidad (50), el número en cuestión, por estar formado por los factores primos 2, 3 y 5, será divisible por todos los números que se pueden formar con dichos factores primos, siempre

que no lleven exponentes superiores a tres, dos y uno, respectivamente. Es decir, 360 será divisible por

1	2	2^2	2^3
3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$
3^2	2×3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 3^2$
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$
3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$
$3^2 \times 5$	$2 \times 3^2 \times 5$	$2^2 \times 3^2 \times 5$	$2^3 \times 3^2 \times 5$

En este cuadro aparecen todos los divisores de 360, pues otro número que tuviera un factor distinto de 2, 3 y 5, o bien alguno de éstos con exponente superior a tres, dos y uno, respectivamente, no sería divisible por 360.

El método práctico para obtener todos los divisores de un número, puede expresarse por la siguiente

REGLA. — 1.° *Se descompone el número en sus factores primos.*

2.° *Se escribe la unidad y, a continuación, las potencias sucesivas del menor factor primo contenidas en el número.*

3.° *Los números anteriores (que son ya divisores del número dado), se multiplican por cada una de las potencias del segundo factor primo.*

4.° *Todos los números obtenidos hasta ahora se multiplican por las sucesivas potencias del tercer factor primo, y así se continúa hasta haber operado con las potencias del último factor primo.*

La operación suele dispornerse así:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

	1	2	4	8
Productos por 3	3	6	12	24
Productos por 3^2	9	18	36	72
Productos por 5	5	10	20	40
	15	30	60	120
	45	90	180	360

62. **Formación de todos los divisores comunes a varios números.**— Según dijimos (55, 1.ª prop.), *todo número que divide a otros varios, divide a su m. c. d.*

En consecuencia,

Para hallar todos los divisores comunes a varios números, bastará obtener todos los divisores del m. c. d. de dichos números.

EJEMPLO. — Formar todos los divisores comunes a 516, 860 y 1.204.

El m. c. d. de 516, 860 y 1.204 es 172; luego, el problema se reduce a hallar los divisores de 172. Tenemos:

$$172 = 2^2 \times 43$$

1	2	4
43	86	172

que son todos los divisores comunes a 516, 860 y 1.204.

EJERCICIOS

164. Hallar el m. c. d. de los números 24, 36 y 48. íd. de 48, 231 y 84.

165. Hallar el m. c. d. de tres números *a*, *b* y *c* cuya descomposición factorial es

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \qquad b = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \qquad c = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Hallar el m. c. d. de los números siguientes:

166. *a)* 72 y 90 *b)* 100 y 150
167. *a)* 140 y 35 *b)* 200 y 240
168. *a)* 25, 45 y 75 *b)* 15, 36 y 21
169. *a)* 72, 30 y 114 *b)* 20, 32 y 48
170. *a)* 18, 27 y 30 *b)* 35, 42 y 70
171. *a)* 125, 275 y 150 *b)* 210, 330 y 440
172. *a)* 150, 200 y 250 *b)* 128, 72 y 156

173. 840 y 3.240
174. 1.080 y 1.800
175. 180, 270 y 900
176. 420, 1.620 y 2.100
177. 105, 525 y 2.835
178. 462, 770 y 2.002
179. 5.929, 11.858 y 17.787

180. ¿Qué modificación experimenta el m. c. d. de 290, 150, 1.300, cuando se multiplica a estos números por 7? ¿Y cuando se les divide por 10? Comprobar la contestación.

181. Averiguar si son primos entre sí los números siguientes:

a) 221 y 263; *b)* 299 y 461; *c)* 554, 1.086 y 7.542

182. Tres reglas cuyas longitudes son, respectivamente, 184, 165 y 286 cm., se quieren dividir en partes iguales, de modo que resulten iguales las divisiones obtenidas en las tres. ¿Cuál será la máxima longitud que puede tener cada una de esas divisiones?

183. Dibujar dos segmentos de 104 y 195 mm., respectivamente, y señalar en ellos la máxima parte alícuota común.

Hallar el m. c. m. de los números siguientes:

184.	*a)* 45 y 75	*b)* 60 y 105	**189.**	60, 70 y 72
185.	*a)* 18 y 27	*b)* 72 y 90	**190.**	7, 45 y 175
186.	*a)* 8, 12 y 18	*b)* 20, 32 y 48	**191.**	35, 135 y 175
187.	*a)* 14, 36 y 21	*b)* 16, 24 y 40	**192.**	72, 120 y 168
188.	*a)* 10, 12, 18 y 24	*b)* 7, 21, 9 y 12	**193.**	121, 605 y 847

194. Hallar los seis primeros múltiplos comunes de 18, 54 y 90.

195. ¿Qué modificación experimentará el m. c. m. de los números 45, 24 y 32, si se les multiplica por 9? ¿Y si se les divide por 3? Comprobar la respuesta.

196. Dos números a y b equivalen a los siguientes productos:

$$a = 9 \times 731 \qquad b = 14 \times 731$$

Sin hallar esos números, determínese: 1.º, su m. c. d. y su m. c. m.; 2.º, su producto

197. Calcular los múltiplos comunes de 36, 12 y 42 que están formados por cuatro cifras.

198. Hallar el menor de los múltiplos comunes de las nueve cifras significativas.

199. Tres ciclistas recorren una pista circular. El primero tarda 12 minutos en dar una vuelta, el segundo, 15 y el tercero, 18. Si los tres salieron al mismo tiempo, ¿al cabo de cuánto tiempo volverán los tres a encontrarse en el punto de partida?

200. Tres barcos hacen el mismo servicio: el primero cada 10 días, el segundo cada 14 días, y el tercero cada 21. El 1.º de marzo salen los tres barcos. ¿En qué fecha volverán a coincidir sus salidas?

201. El m. c. d. de dos números es 9 y el m. c. m. 90. ¿Cuál es el producto de esos números?

Hallar todos los divisores de los números siguientes:

202. 72	**204.** 120	**206.** 1.080	**208.** 4.221
203. 400	**205.** 360	**207.** 3.232	**209.** 5.225

Hallar todos los divisores comunes de los siguientes números:

210. 140 y 35	**212.** 18, 72 y 90	**214.** 180, 270 y 900
211. 75 y 130	**213.** 20, 32 y 48	**215.** 420, 1.620 y 2.100

7. Revisión de las fracciones ordinarias

63. Fracciones equivalentes. — Recordemos que se dice de dos o más fracciones que son equivalentes cuando, teniendo distintos términos, el valor de todas ellas es el mismo, por representar la misma parte de la unidad.

Así, por ejemplo, obsenvando las figuras adjuntas, vemos que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes, pues las dos fracciones representan una parte igual del rectángulo unidad.

También son equivalentes $\frac{6}{8}$ y $\frac{3}{4}$.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{6}{8}$

$\frac{3}{4}$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES.

Si se multiplican o dividen los dos términos de una fracción por un mismo número, la fracción no varía.

Luego, para obtener una fracción equivalente a otra dada, basta multiplicar o dividir (si la división es exacta) sus dos términos por el mismo número.

Así, las fracciones

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \frac{32}{48}$$

son todas equivalentes, ya que cada una está obtenida multiplicando por 2 los términos de la anterior.

Igualmente lo son

$$\frac{243}{324} = \frac{81}{108} = \frac{27}{36} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

pues cada una está obtenida dividiendo por 3 los términos de la anterior.

OBSERVACIÓN. — Si se quieren obtener *todas* las fracciones equivalentes a una dada, es necesario hallar su *irreducible* correspondiente. Una vez obtenida, bastará multiplicar sus dos términos, sucesivamente, por los números 1, 2, 3,... *n*, de la serie natural.

Así, para obtener todas las fracciones, equivalentes a $\frac{243}{324}$, partiremos de $\frac{3}{4}$ e iremos luego multiplicando sus dos términos por 1, 2, 3,... Hallaremos

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \frac{21}{28} = \frac{24}{32} \quad \ldots$$

64. **Simplificación de fracciones.** — Simplificar una fracción es hallar otra equivalente de términos menores.

Aplicando la propiedad antes enunciada, podemos decir que

Para simplificar una fracción, se dividen sus dos términos por un mismo divisor común.

EJEMPLO. — La fracción $\frac{10.010}{13.090}$ queda simplificada de este modo:

$$\frac{10.010}{13.090} = \frac{5.005}{6.545} = \frac{1.001}{1.309} = \frac{143}{187} = \frac{13}{17}$$

habiendo dividido a sus dos términos, sucesivamente, por 2, 5, 7 y 11.

65. **Fracciones irreducibles.** — Se llama irreducible aquella fracción que no puede simplificarse, por no tener sus términos ningún divisor común distinto de la unidad. Esto significa que los términos de las fracciones irreducibles han de ser *primos entre sí.*

EJEMPLO. — La fracción $\frac{13}{17}$ obtenida en la simplificación anterior, es irreducible.

Al simplificar una fracción, conviene, generalmente, reducirla *a su más simple expresión*, es decir, hallar la fracción irreducible equivalente a la dada, para lo cual *basta dividir los dos términos por su máximo común divisor*. Los términos de la fracción resultante serán primos entre sí, puesto que no tendrán más factor común que la unidad.

Así, para obtener la equivalente irreducible de la fracción $\frac{96}{168}$, bastará dividir los dos términos por 24, ya que m. c. d. (96 y 168) = 24. Resulta:

$$\frac{96}{168} = \frac{96:24}{168:24} = \frac{4}{7}$$

66. Reducción de fracciones al mínimo común denominador. — Reducir dos o más fracciones a común denominador, es transformarlas en otras equivalentes que tengan igual denominador.

Esto se consigue, buscando un múltiplo común de todos los denominadores y hallando luego las fracciones equivalentes a las dadas, que tengan por denominador el múltiplo común hallado.

El múltiplo común de los denominadores, puede estar formado por su producto.

En la práctica, sin embargo, resulta mucho más ventajoso reducir las fracciones al *mínimo común denominador*. Con ello se consigue que los términos de las fracciones resultantes sean lo más pequeños posible. Para eso, se elige por denominador común el m. c. m. de los denominadores, operando siempre con las fracciones irreducibles equivalentes a las dadas. Luego, aplicaremos la siguiente regla:

Para reducir varias fracciones al mínimo común denominador, se empieza por hallar las correspondientes irreducibles, si es que ya no lo son.

Se calcula el m. c. m. de los denominadores de las fracciones irreducibles, y éste será el denominador común.

Para determinar los numeradores, se divide el m. c. m. hallado por el denominador de cada fracción irreducible, y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

EJEMPLO. — Reducir al mínimo común denominador las fracciones siguientes:

$$\frac{21}{24},\ \frac{11}{15},\ \frac{34}{40}\ \text{y}\ \frac{115}{180}$$

Sus correspondientes irreducibles son:

$$\frac{7}{8},\quad \frac{11}{15},\quad \frac{17}{20}\quad \text{y}\quad \frac{23}{36}$$

Como m. c. m. (8, 15, 20 y 36) = 360, tendremos:

$360 : 8 = 45$; $\quad \dfrac{7 \times 45}{360} = \dfrac{\mathbf{315}}{\mathbf{360}}$; $\quad 360 : 15 = 24$; $\quad \dfrac{11 \times 24}{360} = \dfrac{\mathbf{264}}{\mathbf{360}}$

$360 : 20 = 18$; $\quad \dfrac{17 \times 18}{360} = \dfrac{\mathbf{306}}{\mathbf{360}}$; $\quad 360 : 36 = 10$; $\quad \dfrac{23 \times 10}{360} = \dfrac{\mathbf{230}}{\mathbf{360}}$

67. Operaciones con fracciones.— Con las fracciones se pueden efectuar las mismas operaciones que con los números naturales. Para resolver un problema cuyos datos sean fracciones, se practican las mismas operaciones que habrían de efectuarse suponiendo que los números fueran naturales.

68. Adición de fracciones.— I. LAS FRACCIONES TIENEN IGUAL DENOMINADOR. Tratemos, por ejemplo, de sumar las fracciones

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{5}{7}$$

Teniendo en cuenta que la suma representa unidades de la misma especie que las expresadas por los sumandos, diremos:

3 *séptimos* + 2 *séptimos* + 5 *séptimos* = 10 *séptimos*

o, en forma de fracciones,

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$$

II. LAS FRACCIONES NO TIENEN IGUAL DENOMINADOR. Sea, por ejemplo, calcular la suma

$$\frac{7}{8} + \frac{4}{9} + \frac{5}{12}$$

Las unidades fraccionarias expresadas por los sumandos, son de distinta especie. No podemos, pues, sumar

7 *octavos* + 4 *novenos* + 5 *doceavos*

Pero si reducimos las fracciones dadas a común denominador, obtendremos otras equivalentes con denominador común, a las que podremos aplicar la regla anterior. Es decir:

$$\frac{7}{8}+\frac{4}{9}+\frac{5}{12}=\frac{63}{72}+\frac{32}{72}+\frac{30}{72}=\frac{125}{72}$$

Por consiguiente:

Para sumar fracciones de igual denominador se suman los numeradores y se pone el mismo denominador.

Si las fracciones no tienen igual denominador, se reducen primero a un común denominador.

69. Número mixto.— La suma de un número natural y una fracción menor que la unidad (propia), recibe el nombre de número mixto.

EJEMPLO: $3+\frac{5}{8}$ que, abreviadamente, se escribe $3\frac{5}{8}$.

70. Suma de números mixtos.— *Cuando en la suma de fracciones aparecen entre los sumandos números enteros o mixtos, pueden reducirse a fracción impropia, pero es preferible sumar separadamente los enteros y añadir su suma a la de las fracciones.*

EJEMPLO:

$$4\frac{5}{7}+8+\frac{3}{5}+15\frac{2}{3}=\frac{33}{7}+8+\frac{3}{5}+\frac{47}{3}=$$

$$=\frac{495}{105}+\frac{840}{105}+\frac{63}{105}+\frac{1.645}{105}=\frac{3.043}{105}=28\frac{103}{105}$$

Resulta, sin embargo, más rápido operar así:

$$4\frac{5}{7}+8+\frac{3}{5}+15\frac{2}{3}=27+\frac{5}{7}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=27+\frac{75}{105}+\frac{63}{105}+\frac{70}{105}=$$

$$=27+\frac{208}{105}=27+1\frac{103}{105}=28\frac{103}{105}$$

71. Sustracción de fracciones.— Siendo la resta la operación inversa de la suma, fácilmente se deduce la siguiente regla:

Para restar fracciones de igual denominador se restan los numeradores y se pone el mismo denominador.

Si las fracciones no tienen igual denominador se reducen previamente a un común denominador.

Cuando el minuendo o el sustraendo son números enteros o mixtos, se les reduce a fracción y se aplica luego la regla precedente.

EJEMPLOS:

$$9 - \frac{4}{7} = \frac{63}{7} - \frac{4}{7} = \frac{59}{7} = 8\frac{3}{7}$$

$$11 - 5\frac{2}{3} = \frac{33}{3} - \frac{17}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$8\frac{2}{9} - 3\frac{1}{4} = \frac{74}{9} - \frac{13}{4} = \frac{296}{36} - \frac{117}{36} = \frac{179}{36} = 4\frac{35}{36}$$

EJERCICIOS

216. ¿Qué fracción de hora representan 12 minutos? ¿A qué fracción de Kg. equivalen 75 Dg.? Escribir las correspondientes fracciones irreducibles.

217. Supuesto un segmento dividido en 3 partes iguales, ¿en cuántas partes habrá que dividir cada una de las primeras para obtener doceavas partes del segmento? ¿A cuántas doceavas partes equivalen, respectivamente, las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ del segmento?

Hallar las fracciones irreducibles equivalentes a las siguientes fracciones, procediendo por divisiones sucesivas:

218. $\frac{52}{56}$ **223.** $\frac{108}{213}$ **228.** $\frac{64}{136}$ **233.** $\frac{288}{432}$

219. $\frac{84}{210}$ **224.** $\frac{192}{312}$ **229.** $\frac{48}{154}$ **234.** $\frac{324}{576}$

220. $\frac{72}{168}$ **225.** $\frac{108}{144}$ **230.** $\frac{224}{378}$ **235.** $\frac{396}{540}$

221. $\frac{96}{248}$ **226.** $\frac{168}{192}$ **231.** $\frac{180}{268}$ **236.** $\frac{720}{1020}$

222. $\frac{72}{126}$ **227.** $\frac{112}{144}$ **232.** $\frac{324}{432}$ **237.** $\frac{1920}{4320}$

Id., procediendo por el método del máximo común divisor:

238. $\frac{24}{132}$ **243.** $\frac{640}{3200}$ **248.** $\frac{639}{1704}$ **253.** $\frac{608}{836}$

239. $\frac{64}{432}$ **244.** $\frac{4851}{11025}$ **249.** $\frac{588}{686}$ **254.** $\frac{846}{360}$

240. $\frac{132}{484}$ **245.** $\frac{312}{408}$ **250.** $\frac{1015}{1624}$ **255.** $\frac{4705}{6587}$

241. $\frac{120}{1496}$ **246.** $\frac{328}{1148}$ **251.** $\frac{994}{1704}$ **256.** $\frac{1885}{4095}$

242. $\frac{145}{344}$ **247.** $\frac{484}{1089}$ **252.** $\frac{542}{813}$ **257.** $\frac{945}{4156}$

258. Hallar todas las fracciones equivalentes a $\frac{81}{117}$ cuyos términos sean menores que los de ésta.

259. ¿Cuál es la fracción que tiene por denominador 153 y es equivalente a $\frac{4}{9}$

260. Dada la fracción $\frac{247}{182}$, averiguar todas las fracciones irreducibles menores que ella con denominador 14.

261. ¿Qué expresión literal tendrán los términos de cualquier fracción equivalente a la irreducible $\frac{4}{5}$? Demostrar que la suma de dichos términos es siempre múltiplo de 9. Hallar la fracción equivalente a $\frac{4}{5}$ cuyos términos sumen 63.

262. Hallar la fracción equivalente a $\frac{12}{28}$ cuyos términos sumen 120.

263. Hallar la fracción equivalente a $\frac{5}{8}$ cuyos términos tengan por diferencia 27.

Reducir al mínimo común denominador las fracciones siguientes:

264. $\frac{7}{9}, \frac{5}{18}, \frac{1}{3}$ **266.** $\frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{7}{12}$ **268.** $\frac{12}{32}, \frac{1}{12}, \frac{15}{100}$

265. $\frac{5}{12}, \frac{2}{9}, \frac{1}{15}$ **267.** $\frac{2}{15}, \frac{1}{25}, \frac{3}{20}$ **269.** $\frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$

270. $\frac{3}{8}, \frac{1}{12}, \frac{5}{16}, \frac{1}{20}$

271. $\frac{5}{9}, \frac{2}{15}, \frac{7}{12}, \frac{1}{21}$

272. $\frac{1}{10}, \frac{4}{25}, \frac{2}{15}, \frac{6}{35}$

273. $\frac{22}{28}, \frac{9}{14}, \frac{10}{105}, \frac{1}{35}$

274. $\frac{2}{7}, \frac{36}{126}, \frac{28}{42}$

275. $\frac{63}{168}, \frac{48}{72}, \frac{7}{24}$

276. $\frac{60}{84}, \frac{4}{10}, \frac{36}{135}$

277. $\frac{14}{84}, \frac{7}{18}, \frac{140}{336}$

278. $\frac{429}{462}, \frac{51}{63}, \frac{100}{112}$

Efectuar las sumas siguientes:

279. $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{4}{9}$

280. $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \frac{7}{9}$

281. $\frac{4}{7} + \frac{5}{12} + \frac{8}{9}$

282. $\frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{5}{16}$

283. $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{7}$

284. $\frac{3}{7} + 6\frac{1}{5}$

285. $7\frac{2}{3} + \frac{7}{8}$

286. $2\frac{1}{4} + 4\frac{5}{6}$

287. $9\frac{3}{4} + 4\frac{2}{9}$

288. $3\frac{1}{2} + 15\frac{2}{7}$

289. $7\frac{4}{7} + 3\frac{3}{5} + 8\frac{4}{5}$

290. $2 + 7\frac{3}{7} + 24\frac{1}{2}$

291. $6\frac{2}{9} + 3 + 8\frac{4}{7}$

292. $5\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}$

293. $9\frac{3}{12} + 5\frac{15}{25} + 4$

Efectuar las siguientes sustracciones:

294. $\frac{7}{13} - \frac{8}{17}$

295. $\frac{31}{40} - \frac{20}{35}$

296. $5 - 2\frac{7}{21}$

297. $7\frac{4}{6} - 2\frac{5}{9}$

298. $26\frac{4}{5} - 17\frac{3}{15}$

299. $19\frac{3}{5} - \frac{11}{3}$

Hallar el valor de las expresiones siguientes:

300. $\frac{5}{9} - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}$

301. $11 - \left(\frac{2}{5} + 3\frac{8}{9}\right)$

302. $\left(\frac{7}{2} - \frac{2}{7}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)$

8. Multiplicación y división de fracciones

72. Producto de una fracción por un entero.— Hallemos el producto $\frac{3}{14} \times 5$. Según la definición de producto, la fracción que se busca será la suma de 5 sumandos iguales a $\frac{3}{14}$, es decir:

$$\frac{3}{14} \times 5 = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + \frac{3}{14} = \frac{3 \times 5}{14} = \frac{15}{14}$$

De donde se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar una fracción por un entero, se multiplica por dicho número el numerador de la fracción, y se deja invariable el denominador.

CASO PARTICULAR: **El denominador de la fracción es divisible por el número entero.** — Sea, por ejemplo, la multiplicación

$$\frac{4}{9} \times 3 = \frac{4 \times 3}{9}$$

Vemos que el resultado puede simplificarse dividiendo por 3 a los dos términos de la fracción, por lo que se obtiene

$$\frac{4}{9} \times 3 = \frac{4 \times 3}{9} = \frac{4}{9:3} = \frac{4}{3}$$

Es decir, que *para multiplicar una fracción por un número entero que sea divisor del denominador, basta dejar invariable el numerador y dividir el denominador por el entero.*

73. Cociente de una fracción por un entero.

Para dividir una fracción por un entero, se multiplica el denominador por el entero y se deja el mismo numerador.

EJEMPLO: $$\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7 \times 3} = \frac{4}{21}$$

Para probar que este es el verdadero cociente, basta observar que su producto por el divisor es igual al dividendo.

En efecto: $$\frac{4}{7 \times 3} \times 3 = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{4}{7}$$

CASO PARTICULAR: **El numerador de la fracción es divisible por el entero.** — *Para dividir una fracción por un entero, cuando el numerador de la fracción es divisible por el entero, basta dividir dicho numerador por el entero y dejar invariable el denominador.*

$$\frac{12}{13} : 4 = \frac{12 : 4}{13} = \frac{3}{13}$$

Éste será el verdadero cociente, ya que su producto por el divisor da el dividendo.

En efecto: $$\frac{3}{13} \times 4 = \frac{12}{13}$$

74. **Multiplicación de fracciones.** — La multiplicación de fracciones es en realidad una multiplicación y división combinadas. Para explicarlo, resolvamos el siguiente

PROBLEMA. — *La velocidad con que marcha un automóvil es de* $\frac{207}{3}$ *kilómetros por hora. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en* $\frac{5}{4}$ *de hora?*

Si en vez de ser fraccionarios los números que intervienen en el problema, fueran enteros, la solución se encontraría efectuando su producto. Por analogía, podemos decir también que el número de kilómetros recorridos por el mencionado automóvil, viene expresado por el producto

$$\frac{207}{3} \times \frac{5}{4}$$

Pero a esta multiplicación no la podemos aplicar la definición de producto dada para los números naturales, ya que *el multiplicador no es un número natural.*

Recorriendo el automóvil $\frac{207}{3}$ kilómetros en una hora, el espacio recorrido en $\frac{1}{4}$ de hora, lo obtendremos efectuando la división

$$\frac{207}{3} : 4 = \frac{207}{3 \times 4}$$

y el espacio recorrido en $\frac{5}{4}$ de hora, se hallará, evidentemente, multiplicando la expresión anterior por 5. Es decir:

$$\frac{207}{3 \times 4} \times 5 = \frac{207 \times 5}{3 \times 4}$$

Por lo cual, generalizando el problema, podemos enunciar:

Para multiplicar fracciones, se halla el producto de los numeradores y el resultado se divide por el producto de los denominadores.

EJEMPLOS:

$$\frac{5}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{5 \times 7}{9 \times 8} = \frac{35}{72}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{11}{9} = \frac{2 \times 4 \times 11}{3 \times 5 \times 9} = \frac{88}{135}$$

Si hay números enteros o mixtos, se les transforma en fracciones y se aplica la regla anterior.

Recuérdese que todo número entero puede considerarse como una fracción que tiene por denominador la unidad.

EJEMPLOS:

$$2\frac{3}{5} \times 4 = \frac{13}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{52}{5}$$

$$1\frac{3}{4} \times 5\frac{7}{9} = \frac{7}{3} \times \frac{52}{9} = \frac{364}{27}$$

Fracciones recíprocas. — *Dos fracciones son recíprocas o inversas, una de otra, cuando el numerador de una de ellas es el denominador de la otra, y viceversa.*

A las fracciones recíprocas se les llama también *números recíprocos.*

EJEMPLO:

El recíproco de $\frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$; el recíproco de 4 es $\frac{1}{4}$; el de $\frac{1}{8}$ es 8

El producto de dos números recíprocos es igual a 1.

Así.

$$\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{3 \times 8}{8 \times 3} = 1$$

76. División de fracciones.

Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor.

EJEMPLO:

$$\frac{8}{9} : \frac{5}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{56}{45}$$

En efecto, este resultado es el verdadero cociente, ya que su producto por el divisor es igual al dividendo:

$$\frac{56}{45} \times \frac{5}{7} = \frac{8 \times 7}{9 \times 5} \times \frac{5}{7} = \frac{8}{9}$$

Si hay números enteros o mixtos, se los transforma en fracciones y se aplica la regla anterior.

EJEMPLO:

$$3 : \frac{5}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{4} = \frac{14}{3} : \frac{13}{4} = \frac{14}{3} \times \frac{4}{13} = \frac{56}{39}$$

77. Cociente exacto de dos números enteros. — Después del estudio hecho hasta ahora de las fracciones, vemos que siempre es posible expresar el cociente exacto de dos números enteros, aun cuando el dividendo no sea divisible por el divisor.

El cociente exacto de dos números enteros es igual a una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.

Así, el cociente exacto de dividir 37 entre 12 es $\frac{37}{12}$, ya que este resultado multiplicado por el divisor es igual al dividendo:

$$\frac{37}{12} \times 12 = 37$$

78. Fracción de términos fraccionarios. — Como acabamos de ver, toda fracción expresa el cociente de la división del numerador por el denominador.

Así

$\frac{4}{5}$ **significa** $4 : 5$

Podemos generalizar esta notación y aplicarla igualmente al cociente de la división de dos fracciones.

Es decir, que

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} \quad \text{puede escribirse} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

Resulta así una nueva expresión, que se denomina fracción *compuesta.*

Fracciones dobles o compuestas son aquellas en las que uno de los términos, o los dos, están formados por números fraccionarios.

EJEMPLOS:

$$\frac{\frac{1}{2}}{5}; \qquad \frac{6}{\frac{3}{8}}; \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}; \qquad \frac{4\frac{1}{3}}{9\frac{5}{8}}$$

REGLA. — *Para simplificar una fracción compuesta, se divide la fracción numerador por la fracción denominador.*

Así,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4\frac{1}{3}}{9\frac{5}{8}} = \frac{13}{3} : \frac{77}{8} = \frac{13 \times 8}{3 \times 77} = \frac{104}{231}$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes operaciones y simplificar cuando sea posible:

303. $\frac{11}{18} \times 24$

304. $\frac{5}{38} \times 264$

305. $\frac{13}{14} \times 388$

306. $74 \times \frac{27}{43}$

307. $208\frac{1}{4} \times \frac{8}{9}$

308. $625\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$

309. $5\frac{3}{4} \times 1\frac{4}{7} \times \frac{3}{14}$

310. $18\frac{2}{3} \times 13\frac{8}{9} \times \frac{27}{50}$

311. $42 \times \frac{2}{7} \times 5\frac{2}{11} \times \frac{11}{15}$

312. $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{5}{8} \times 15$

313. $\frac{12}{17} \times 5\frac{2}{3} \times \frac{1}{22} \times \frac{49}{51} \times \frac{7}{12}$.

314. $\left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}\right) + \frac{3}{4}$

315. $\frac{11}{12} + \left(\frac{3}{4} \times \frac{6}{7}\right)$

316. $\left(\frac{8}{15} \times \frac{3}{5}\right) - \frac{3}{25}$

317. $\frac{7}{8} - \left(\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}\right)$

318. $\left(4\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{5}\right) + 17$

319. $84 - \left(4\frac{5}{6} \times 7\frac{3}{5}\right)$

320. $\frac{72}{95} : 12$

321. $\frac{135}{179} : 18$

322. $\frac{128}{204} : 16$

323. $785\frac{3}{5} : 7$

324. $428 : 3\frac{2}{3}$

325. $173 : 5\frac{2}{5}$

326. $214\frac{2}{3} : 20\frac{1}{2}$

327. $459\frac{6}{7} : 24\frac{3}{8}$

328. $6075\frac{1}{8} : 62\frac{1}{4}$

329. $\left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}\right) : \frac{4}{5}$

330. $\left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}\right) : \frac{5}{9}$

331. $\left(\frac{7}{9} \times \frac{4}{13}\right) : \frac{28}{37}$

332. $\frac{24}{25} : \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{8}\right)$

333. $\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{7}\right) : \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{7}\right)$

334. $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{7}\right) : \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{7}\right)$

Simplificar las siguientes fracciones compuestas:

335. $\dfrac{2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}}{2}$

336. $\dfrac{4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}}{9}$

337. $\dfrac{4\frac{1}{2}}{\frac{5}{7} \times 3\frac{1}{2}}$

338. $\dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{7}{12}}{4\frac{1}{2} \times \frac{2}{9}}$

339. $\dfrac{5\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3}}{2\frac{1}{4} : 5\frac{1}{3}}$

340. $\dfrac{\frac{1}{6} \times 3\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}}{\frac{4}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{8}{15}}$

341. Un grifo puede llenar un depósito en 6 horas, otro puede hacerlo en 8 horas, y un tercero en 13 horas. ¿Qué fracción del referido depósito llenarán los tres, manando juntos durante una hora?

342. Una cuba de vino se llenó hasta su mitad. Si después de sacar los $\frac{3}{5}$ de su contenido, quedaron 36 litros, ¿cuál será la capacidad total de la cuba?

343. Un obrero hizo en un día $\frac{1}{5}$ de cierta obra, otro $\frac{3}{10}$, y otro $\frac{5}{20}$. ¿Qué parte de la obra han hecho los tres juntos?

344. Una persona compró un automóvil por 118.200 ptas. Al cabo de tres años lo vendió perdiendo $\frac{1}{6}$ de lo que le costó. ¿Por cuánto lo vendió?

345. De una pieza de tela que mide $25\frac{1}{3}$ metros, se han cortado $17\frac{1}{4}$ metros. ¿Qué trozo de tela queda aún?

346. Tres industriales reciben un vagón de harina. Uno se queda con los $\frac{2}{5}$ del vagón más 6 Qm.; otro, con $\frac{1}{3}$ más 7 Qm., y el otro con el resto, que son 11 Qm. ¿Cuántas Tm. de harina traía el vagón? ¿Cuántos Qm. de harina adquirió cada industrial?

347. Los $\frac{2}{3}$ más los $\frac{3}{4}$ de un número suman 340. ¿Cuál es ese número?

348. ¿Por qué fracción se ha de multiplicar $\frac{7}{25}$ para obtener $\frac{1}{5}$?

349. ¿Qué consumo de leche hace al mes una familia, sabiendo que diariamente gasta $3\frac{1}{4}$ litros en el desayuno, $\frac{3}{4}$ de litro en la comida y $1\frac{1}{2}$ litros en la cena? ¿Cuánto pagará mensualmente por este concepto, si el litro se vende a 3'60 pesetas?

350. ¿Qué cantidad de vino hay almacenado en 7 cajas y media de botellas, si cada caja puede contener 24 botellas, y cada una de éstas hace $\frac{3}{4}$ de litro?

351. Una familia gasta la mitad de sus ingresos anuales en comida, la sexta parte en pagar el piso, y la octava parte en vestido y otros gastos menores. En total, el gasto asciende a 39.900 ptas. ¿Cuánto gana esa familia al año?

352. ¿Cuál es la fortuna que posee una persona, si se sabe que $\frac{1}{5}$, más los $\frac{3}{10}$, más los $\frac{5}{49}$ de la misma equivalen a 590.000 ptas?

353. Un tornillo adelanta $\frac{3}{4}$ de milímetro en cada vuelta. ¿Cuántas vueltas habrá de dar para adelantar $3\frac{1}{2}$ milímetros?

354. Hemos mezclado tres clases de vinos. Del primero se han puesto $\frac{2}{7}$ del total, del segundo $\frac{4}{9}$ del total y del tercero, 34 litros. ¿De cuántos litros se compone la mezcla?

355. Una persona que poseía un capital de 59.500 duros perdió en el juego, primero los $\frac{2}{9}$ del total y después los $\frac{3}{20}$ de lo que le había quedado. ¿Cuántas pesetas tendrá ahora?

356. Dispuso una persona, al morir, que su fortuna fuese repartida entre sus dos hijos, de este modo: uno de ellos recibiría los $\frac{5}{13}$ de lo que había en metálico

y una tienda, y el segundo percibiría el resto del dinero y además una casa. Hecho así el reparto, a ambos les correspondió herencia de igual valor, teniendo en cuenta que la tienda estaba tasada en 180.000 ptas. y la casa, en 132.000. Se pregunta cuánto dinero recibió cada uno.

357. La vida del matemático Diofanto estuvo distribuída como sigue: $\frac{1}{6}$ de ella indica su infancia; $\frac{1}{12}$, su adolescencia; transcurrido $\frac{1}{7}$ más de su vida, se casó; cinco años más tarde le nació un hijo, que alcanzó sólo la mitad de la edad del padre; éste le sobrevivió 4 años. ¿A qué edad murió el insigne matemático?

358. ¿Cuál ha sido la velocidad media de un tren, si se sabe que en un recorrido de $213\frac{1}{5}$ kilómetros invirtió $\frac{13}{5}$ de hora?

359. De una finca cuya extensión es de 27.000 m², se han separado los $\frac{2}{9}$, y del resto se han hecho 5 partes. ¿Cuál será, en áreas, la superficie de cada parte?

360. De una caja de caudales se sacaron los $\frac{4}{5}$ del total, luego los $\frac{4}{5}$ de lo que quedó, y más tarde los $\frac{4}{5}$ de lo que había quedado. ¿Cuánto había en la caja, si después de las tres extracciones quedaron aún 312 ptas.?

9. Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa

79. Fracciones ordinarias y fracciones decimales. — *Se llaman fracciones ordinarias aquellas cuyo denominador es un número distinto de la unidad seguida de ceros.*

EJEMPLOS: $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{17}{20}$; $\frac{32}{15}$

Fracciones decimales son aquellas cuyo denominador está formado por la unidad seguida de ceros.

EJEMPLOS: $\frac{5}{10}$; $\frac{81}{100}$; $\frac{16}{1000}$; $\frac{322}{100}$

Por tanto, la única diferencia existente entre las fracciones decimales y las ordinarias, es que en las primeras la unidad se considera dividida solamente en 10, 100, 1.000, ... partes iguales, mientras que en las ordinarias, la unidad está dividida en un número cualquiera de partes iguales.

Las fracciones decimales, que constituyen un caso particular de las ordinarias, no son sino los llamados *números decimales.*

Así,

$$\frac{5}{10} = 0'5; \quad \frac{81}{100} = 0'81; \quad \frac{16}{1000} = 0'016; \quad \frac{322}{100} = 3'22$$

Es decir, que podemos enunciar las siguientes reglas:

1.ª Para transformar una fracción decimal en número decimal, se escribe el numerador, y luego se separan en él, a partir de la derecha, tantas cifras decimales como ceros acompañan a la unidad en el denominador. Si el numerador no tuviera bastantes cifras, se le supone con tantos ceros a su izquierda como sean necesarios.

2.ª Para transformar un número decimal en fracción decimal, se toma por numerador el número entero que resulta al suprimir la coma en el decimal, y por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como decimales haya.

80. Conversión de una fracción ordinaria en decimal. — Teniendo en cuenta que una fracción representa el cociente del numerador por el denominador (77), al hallar dicho cociente (exacta o aproximadamente), obtendremos el número o fracción decimal correspondiente a la dada.

Luego,

Para convertir una fracción ordinaria en decimal, se efectúa la división decimal del numerador por el denominador.

81. Clasificación de las fracciones decimales a que dan lugar las ordinarias. — Al dividir el numerador por el denominador con el fin de hallar la fracción decimal que corresponde a una determinada fracción ordinaria, pueden ocurrir dos casos:

1.° *Que se llegue a un resto que sea cero,* y entonces diremos que la fracción equivale a una *fracción decimal exacta.*

2.° *Que el resto de la división no llegue nunca a anularse.* En este caso, como los restos han de ser siempre inferiores al divisor, forzosamente habrán de repetirse y, en consecuencia, también se repetirán *periódicamente* todas o algunas de las cifras del cociente. Cuando esto sucede, decimos que la fracción considerada equivale a una *fracción decimal periódica,* llamándose *período* al conjunto de cifras que se repiten.

Si el período comienza a partir de la coma, la fracción decimal se llama *periódica pura,* y, en caso contrario, *periódica mixta* (*), denominándose entonces *parte no periódica* al grupo de cifras que no se repiten.

EJEMPLO. — Convertir las siguientes fracciones ordinarias en decimales:

$$\frac{7}{8},\ \frac{5}{7}\ \text{y}\ \frac{11}{12}.$$

Procederemos así:

70 | 8	50 | 7	110 | 12
60 0'875	10 0'7142857...	20 0'9166...
40	30	80
0	20	8
	60	
	40	
	50	
	1	

(*) Las expresiones *fracción decimal exacta, fracción decimal periódica pura y fracción decimal periódica mixta,* son sinónimas de *número decimal exacto, número decimal periódico puro y numero decimal periódico mixto,* respectivamente.

La primera fracción ha dado lugar a una decimal *exacta:* 0'875.

En la segunda se repite el primer resto 1, dando lugar a la fracción decimal *periódica pura* 0'7142857...

En la tercera se repite el resto 8, que no es el primero, por lo cual la fracción dada ha originado una fracción decimal *periódica mixta:* 0'91666...

Las fracciones decimales periódicas se representan escribiendo una sola vez el período y colocando encima del mismo un arco, o bien, encerrando el período en un paréntesis. De este modo:

$$\frac{5}{7} = 0'\overset{\frown}{714285} \quad \text{o} \quad 0'(714285); \qquad \frac{11}{12} = 0'91\dot{6} \quad \text{o} \quad 0'91(6)$$

82. Conversión de una fracción decimal exacta en ordinaria. — Ya dijimos (79) cómo se transforma un número decimal en fracción decimal. Pues bien: *si la fracción decimal que resulta no es irreducible, al simplificarla, obtendremos la fracción ordinaria equivalente a la dada.*

EJEMPLOS:

$$0'75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}; \qquad 0'056 = \frac{56}{1000} = \frac{7}{125}$$

83. Generatriz de una fracción periódica. — Dándonos una fracción decimal periódica, podemos hallar la fracción ordinaria que la ha originado, llamada *generatriz.*

84. Generatriz de una fracción periódica pura. — Sea, por ejemplo, la fracción periódica pura 13'(18) cuya generatriz queremos hallar.

Representemos por f el valor de la fracción propuesta, es decir, que

$$f = 13'18\ 18\ 18... \qquad [1]$$

Multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por 100, de manera que la coma decimal quede trasladada a la derecha del primer período; tendremos:

$$100f = 1318'18\ 18\ 18... \qquad [2]$$

Restando ahora miembro a miembro la igualdad [1] de la [2], y teniendo en cuenta que la parte decimal es la misma en las dos igualdades, se obtiene:

$$99f = 1318 - 13$$

de donde, dividiendo a los dos miembros por 99, resulta

$$f = \frac{1318 - 13}{99} = \frac{1305}{99} = \frac{145}{11}$$

Como podríamos razonar de igual modo con otro ejemplo cualquiera, queda justificada la siguiente regla:

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura, se suprime la coma y se pone por numerador la parte entera seguida del primer período, menos la parte entera; y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período, simplificando luego el resultado, cuando sea posible.

EJEMPLOS:

$$0'\widehat{42} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}; \qquad 11'(54) = \frac{1154 - 11}{99} = \frac{1143}{99} = \frac{127}{11}$$

OBSERVACIÓN. — La regla anterior deja de cumplirse únicamente para la fracción decimal periódica 0'999...

En efecto: si se aplicara a esta fracción, se obtendría por resultado 1. De ahí que digamos que *la fracción periódica* 0'999... *no tiene generatriz.*

85. Generatriz de una fracción periódica mixta. — Consideremos, por ejemplo, la fracción periódica mixta $3'17\widehat{352}$, cuya generatriz pretendemos hallar.

Representando por f su valor, tendremos:

$$f = 3'17\ 352\ 352\ 352... \qquad [1]$$

Multipliquemos primero los dos miembros de esta igualdad por 100.000, de modo que la coma quede trasladada a la derecha del primer período; después, multipliquemos a la misma igualdad por 100, para que la coma se desplace a la derecha de la parte no periódica. Tendremos:

$$100.000f = 317352'352\ 352\ 352... \qquad [2]$$
$$100f = 317'352\ 352\ 352... \qquad [3]$$

Restando ahora miembro a miembro la igualdad [3] de la [2], se obtiene:

$$99900f = 317352 - 317$$

y de aquí, dividiendo ambos miembros por 99900,

$$f = \frac{317352 - 317}{99900} = \frac{317035}{99900} = \frac{63407}{19980}$$

Análogamente a como hemos hecho, procederíamos con cualquier otro ejemplo, por lo que podemos enunciar la siguiente regla:

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta, se suprime la coma y se pone por numerador la parte entera seguida de la parte no periódica y del primer período, menos la parte entera seguida de la parte no periódica; y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica. Si es posible, se simplifica la fracción que resulta.

EJEMPLOS:

$$7'03(8) = \frac{7038 - 703}{900} = \frac{6335}{900} = \frac{1267}{180}$$

$$0'079(54) = \frac{7954 - 79}{99000} = \frac{7875}{99000} = \frac{7}{88}$$

86. Números racionales positivos. — El conjunto de los números enteros positivos (llamados también números *naturales)* y el de las fracciones positivas, constituyen los llamados *números* RACIONALES *positivos*. Éstos son únicamente los números que hasta ahora hemos estudiado.

Más tarde veremos cómo existen otros números, denominados IRRACIONALES, que están formados por un número decimal compuesto de infinitas cifras decimales, pero *sin repetirse en forma de período*. Tal es, v. g., el número $\pi = 3'141592...$, que expresa, como sabemos, la relación de la longitud de una circunferencia a la de su diámetro.

Lo característico de estos números decimales es *el no poder transformarse en fracciones.*

EJERCICIOS

361. Transformar las siguientes fracciones decimales en números decimales:

$$\frac{27521}{1000};\quad \frac{359}{10\,000};\quad \frac{54}{10\,000\,000};\quad \frac{42083}{100};\quad \frac{7}{100}$$

362. Transformar los siguientes números decimales en fracciones decimales:

31'6; 5'67; 0'0908; 3'089; 0'0000103

Convertir las siguientes fracciones ordinarias en decimales, indicando a continuación la clase de decimal que ha resultado:

363. $\frac{3}{8};\ \frac{31}{8};\ \frac{13}{50};\ \frac{57}{11};\ \frac{49}{12}$ **364.** $\frac{35}{3};\ \frac{5}{12};\ \frac{19}{7};\ \frac{4}{13};\ \frac{141}{11}$

365. $\frac{160}{37};\ \frac{19}{55};\ \frac{8}{3125};\ \frac{1}{11000};\ \frac{25}{52}$

Hallar la generatriz de las siguientes fracciones decimales periódicas:

364 bis. 3'(81), 7'(54), 0'111..., 1'1313..., 5'1(09)

365 bis. 0'4545..., 203'43(621), 12'(571428), 5'(427)

366. 0'670(45), 5'153153..., 0'00(435), 0'0606...

367. 3'08(1), 229'000(09), 0'0112(80), 2'(714285)

368. 0'2670(45), 0'8(3), 3'108108..., 1'48(076923)

369. ¿Qué fracción ordinaria equivale a la suma 0'8 + 0'(8) + 0'9(8)?

370. Decir cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales, explicando la respuesta:

7, 2'563(8), 2'718281..... (no hay período), 0'4545..., 1'414214..... (no hay período)

10. Potenciación de exponente natural

87. Potenciación de números naturales: definición, nomenclatura y notación. — POTENCIACIÓN, o *elevación a potencias, es la operación que tiene por objeto repetir un número tantas veces como factor como unidades tiene otro.*

La potenciación no es más que un caso particular de la multiplicación, en el que los factores son iguales. Ejemplo:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

El factor que se repite se llama *base;* el número que indica las veces que ha de repetirse la base como factor, se denomina *exponente,* y el resultado, *potencia.* El exponente, escrito en caracteres pequeños, se coloca en la parte superior derecha de la base.

EJEMPLO:

$7^4 = 2.401$ (La base es 7; el exponente, 4, y la potencia, 2.401)

El exponente indica el *grado* de la potencia, o sea, cuántos factores iguales hay en el producto. Las potencias pueden ser de *primer* grado, de *segundo* grado, de *tercer* grado,... y, en general, de *enésimo* grado. La potencia de segundo grado o segunda potencia de un número, recibe el nombre particular de *cuadrado* de ese número; y la potencia de tercer grado o tercera potencia, se denomina *cubo.*

En general, escribiremos a^n para indicar el producto $a \times a \times a \times \ldots$ de n factores iguales a a, y diremos que a^n es la potencia de enésimo grado o potencia enésima de a.

Aunque sean necesarios por lo menos dos factores para que haya producto, se ha *convenido* en designar por primera potencia de un número, a ese mismo número.

Esto es, que $5^1 = 5$; $23^1 = 23$; $a^1 = a$

Es conveniente saber de memoria los cuadrados y cubos de los diez primeros números naturales. Hélos aquí:

NÚMEROS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

88. Consecuencias. — De la definición de potencia y de la de producto de varios factores, se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *Una potencia es nula, si su base es cero.*

O sea, que $0^5 = 0$; $0^{12} = 0$; $0^n = 0$

2.ª *Cualquier potencia de la unidad es igual a* 1.

Es decir, que $1^4 = 1$; $1^{19} = 1$; $1^n = 1$

89. Potencias de 10. — Como aplicación, también, de la definición de potencia, se deduce que

Para hallar una potencia de 10, basta escribir a la derecha de la unidad tantos ceros como unidades tiene el exponente.

Así, $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$

En general, 10^n representa un número formado por la unidad seguida de n ceros.

90. Potencia de una fracción. Su cálculo. — Extendiendo a las fracciones la definición de potencia dada para los números naturales y aplicando las reglas sobre la multiplicación de fracciones, tendremos, por ejemplo,

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{5^3}{7^3} = \frac{125}{343}$$

y, en general,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots = \frac{a \times a \times a \times \ldots}{b \times b \times b \times \ldots} = \frac{a^n}{b^n}$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente regla:

Para elevar una fracción a una potencia, basta elevar a dicha potencia cada uno de los términos de la fracción.

Si se trata de un número mixto, lo reduciremos primero a fracción y se aplicará luego la regla precedente.

EJEMPLO:

$$\left(4\frac{3}{7}\right)^3 = \left(\frac{31}{7}\right)^3 = \frac{31^3}{7^3} = \frac{29.791}{343} = 86\frac{293}{343}$$

91. Toda potencia de una fracción irreducible, es irreducible. — Sea, por ejemplo, la fracción irreducible

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \times 3}$$

cuyos términos son primos entre sí, es decir, no tienen ningún divisor común. Elevémosla al cubo:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{6^3} = \frac{5^3}{(2 \times 3)^3} = \frac{125}{216}$$

Al efectuar esta operación, no se han introducido factores primos nuevos. Luego, si antes el numerador y denominador no tenían ningún divisor común, tampoco lo tendrán después de elevar dichos términos al cubo, por lo que la fracción resultante es también irreducible.

El mismo razonamiento se podría aplicar a otra fracción irreducible cualquiera. Por consiguiente, queda justificado el enunciado del presente párrafo.

92. Propiedades de la potenciación. — I. PROPIEDAD UNIFORME. — La potenciación no es sino un producto de factores iguales. Ahora bien, en virtud de la propiedad uniforme de la multiplicación, si se multiplican miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad. Se deduce de aquí que la propiedad uniforme se verifica también para la potenciación.

Sea la igualdad $a = b$ y repitámosla, por ejemplo, 5 veces:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ a = b \\ a = b \\ a = b \\ a = b \end{array}\right\}$$

Si multiplicamos miembro a miembro estas igualdades, resulta:

$$a \times a \times a \times a \times a = b \times b \times b \times b \times b$$

O, en forma de potencia,

$$a^5 = b^5$$

Según esto, podemos enunciar:

Si los dos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia, se obtiene otra igualdad.

II. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. — 1.° *Respecto del producto.*

Sea, por ejemplo, calcular $(5 \times 2 \times 7)^3$. De acuerdo con la definición de potencia, tenemos:

$$(5 \times 2 \times 7)^3 = (5 \times 2 \times 7) \times (5 \times 2 \times 7) \times (5 \times 2 \times 7) = 5 \cdot 2 \cdot 7 \times 5 \cdot 2 \cdot 7 \times 5 \cdot 2 \cdot 7$$

Aplicando ahora la propiedad conmutativa a este producto de factores, resulta

$$(5 \times 2 \times 7)^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \times 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 7 \cdot 7 \cdot 7$$

y asociando los factores iguales,

$$(5 \times 2 \times 7)^3 = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 7^3$$

Luego,

La potencia de un producto se obtiene, elevando cada factor a esa misma potencia.

En general, $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

2.° *Respecto del cociente.*

Supongamos, por ejemplo, que se trata de calcular $(8 : 5)^4$. Aun en el caso de que sea exacto el cociente que hace de base de la potencia, podemos expresarlo en forma de fracción; y recordando lo dicho sobre potencia de una fracción (92), tendríamos:

$$(8 : 5)^4 = \left(\frac{8}{5}\right)^4 = \frac{8^4}{5^4} = 8^4 : 5^4$$

Es decir, que

La potencia de un cociente indicado se obtiene, elevando a dicha potencia el dividendo y el divisor.

En símbolos,

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

93. Observaciones. — 1.ª *La potenciación no tiene la propiedad conmutativa, es decir, no puede tomarse la base como exponente y viceversa.*

Así, $5^3 \neq 3^5$, pues $5^3 = 125$ y, en cambio, $3^5 = 243$

2.ª *La potenciación tampoco tiene la propiedad distributiva respecto de la suma ni respecto de la diferencia.*

EJEMPLOS:

$$(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2, \text{ pues } (3+5)^2 = 8^2 = 64 \text{ y } 3^2 + 5^2 = 34$$
$$(9-4)^2 \neq 9^2 - 4^2, \text{ pues } (9-4)^2 = 5^2 = 25 \text{ y } 9^2 - 4^2 = 65$$

94. Aplicación de la propiedad distributiva al cálculo rápido: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE. — En virtud de la propiedad distributiva, sabemos que

$$(5 \times 3 \times 7)^3 = 5^3 \times 3^3 \times 7^3 \qquad \text{y} \qquad (9 : 4)^3 = 9^3 : 4^3$$

Escritas en orden inverso, estas igualdades se convierten en

$$5^3 \times 3^3 \times 7^3 = (5 \times 3 \times 7)^3 \qquad \text{y} \qquad 9^3 : 4^3 = (9 : 4)^3$$

Es decir, que podemos enunciar:

1.º **Para multiplicar potencias de igual exponente, se multiplican las bases, y el resultado se eleva a la potencia que indica el exponente común.**

2.º **Para dividir potencias de igual exponente, se dividen las bases, y el resultado se eleva a la potencia que indica el exponente común.**

El uso de estas dos propiedades permite abreviar notablemente el cálculo, sobre todo en el caso de la división de potencias, cuando el cociente de las bases es exacto.

EJEMPLOS:

$$7^2 \times 2^2 \times 3^2 = 42^2 = 1.764; \qquad 91^3 : 13^3 = 7^3 = 343$$

EJERCICIOS

371. Hallar el cuadrado de los números 3.017 y 5.003.108.

372. Hallar el cubo de los números 602, 410, 60.701.

373. Calcular las cinco primeras potencias de 7.

374. Calcular las potencias siguientes:

$$12^1;\quad 37^1;\quad 0^{121};\quad 0^{1111};\quad 1^9;\quad 1^{32};\quad 10^7;\quad 10^{12}$$

375. Efectuar las siguientes potenciaciones:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2;\qquad \left(\frac{4}{5}\right)^3;\qquad \left(6\frac{2}{3}\right)^2;\qquad \left(4\frac{7}{8}\right)^3;\qquad \left(13\frac{11}{12}\right)^2$$

376. El resultado de elevar al cubo la fracción $\frac{17}{19}$ es igual a $\frac{4913}{6859}$. ¿Se puede simplificar esta fracción? Explicar la respuesta.

377. Hallar el valor de la expresión $a^6 + b^2 - c^3$ para los valores

$$a = 2,\quad b = 3,\quad c = 4.$$

378. Hallar el valor de las siguientes expresiones, efectuando previamente la operación encerrada en cada paréntesis:

$$a = (13-7)^2 + 8;\qquad b = 122 - (18-11)^2;\qquad c = (122-18-11)^2$$

379. Calcular de dos maneras el valor de las siguientes expresiones:

$$(2\times 3\times 5)^2;\qquad 5^2\times 9^2\times 11^2;\qquad (84:14)^2;\qquad 111^3:37^3$$

380. Calcular:

$$208^2 + 159^2;\qquad (208+159)^2;\qquad 318^2 - 303^2;\qquad (318-303)^2$$

381. Agrupar los factores iguales, en forma de potencia, de cada uno de los productos siguientes:

$$3\times 3\times 3\times 4\times 4;\qquad 5\times 5\times 5\times 2\times 7\times 7;\qquad 3\,a\,a\,b\,b\,b\,b\,c$$

11. Operaciones con potencias

95. Producto de potencias de la misma base. — Supongamos, por ejemplo, que se trata de hallar el producto $a^3 \times a^4$, en el que a representa a un número natural cualquiera.

Según la definición de potencia, será

$$a^3 \times a^4 = (a \times a \times a)(a \times a \times a \times a) =$$
$$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^{3+4} = a^7$$

O sea, que el producto está formado por tantos factores iguales a a, como indica la suma 3 + 4, de los exponentes.

Luego, podemos enunciar la siguiente regla:

El producto de varias potencias de la misma base, es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de cada uno de los factores.

EJEMPLO:

$$5^4 \times 5^2 \times 5^3 = 5^{4+2+3} = 5^9$$

En general, $$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

96. Cociente de potencias de la misma base. — Sea calcular el cociente $a^5 : a^3$. Para ello, hemos de encontrar un número que multiplicado por el divisor a^3, dé el dividendo a^5. Ese número es a^2; o sea,

$$a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$$

puesto que se verifica, en efecto, que $a^2 \times a^3 = a^5$.

Podemos, por tanto, enunciar la siguiente regla:

El cociente de dos potencias de la misma base, es igual a otra potencia que tenga la misma base y cuyo exponente sea la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor.

EJEMPLOS:

$$7^6 : 7^2 = 7^4; \qquad 12^{10} : 12^8 = 12^2$$

En general, $$a^m : a^n = a^{m-n}$$

97. Potencia de exponente cero. — La aplicación de la regla anterior sobre cociente de dos potencias de igual base, supone que el exponente del dividendo es mayor que el del divisor. Si dichos exponentes son iguales, el cociente será 1, como resultado de dividir dos números iguales. Es decir, que

$$a^m : a^m = 1$$

Ahora bien: con objeto de unificar la expresión de los resultados que se obtienen, *se ha convenido* en que la regla dada para la división de potencias de la misma base, sea también aplicable en el caso de ser iguales los exponentes del dividendo y divisor. O sea, por *convenio*, es

$a^m : a^m = a^0$, debiendo *admitir* que $a^0 = 1$.

La potencia de exponente cero de un número (distinto de cero), representa siempre a la unidad.

Así,

$$3^0 = 1; \qquad 17^0 = 1; \qquad 59^0 = 1; \qquad \left(\tfrac{3}{4}\right)^0 = 1$$

98. Potencia de otra potencia. — Supongamos que se desea calcular $(a^7)^4$. Aplicando la regla dada para multiplicar potencias de la misma base (96), tendremos:

$$(a^7)^4 = a^7 \times a^7 \times a^7 \times a^7 = a^{7+7+7+7} = a^{7\times 4} = a^{28}$$

En general, podemos enunciar la siguiente regla:

Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes y se deja la misma base.

EJEMPLOS:

$$(3^2)^2 = 3^4 = 81; \qquad (2^4)^3 = 2^{12} = 4.096; \qquad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

En general,

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

99. Cuadrado de la suma de dos números.— Sean a y b dos números cualesquiera, y tratemos de hallar el cuadrado de su suma indicada.

De acuerdo con la definición de potencia, será

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

Ahora, para efectuar el producto del segundo miembro, consideremos al segundo factor $a + b$ como un solo número. Tendremos:

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = a^2 + ab + ba + b^2$$

El sumando ba equivale a ab, en virtud de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Si además tenemos en cuenta que ab se repite dos veces como sumando, siendo igual la suma, por tanto, a $2\,ab$, nos queda, en definitiva:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2\,ab + b^2$$

Es decir:

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

EJEMPLO:

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

Si efectuamos previamente la suma $5 + 3$ y elevamos luego al cuadrado, veremos que se obtiene el mismo número. Efectivamente, $8^2 = 64$.

100. Cuadrado de la diferencia de dos números.— Tratemos de hallar el cuadrado de la diferencia $a - b$, siendo a y b dos números cualesquiera, con tal de que sea $a > b$.

Razonando de modo análogo a como se ha hecho en el párrafo anterior, tendremos:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)a - (a-b)b = (a^2-ab) - (ab-b^2)$$

Para restar las dos diferencias indicadas que han resultado, recordemos (número 27, Primer curso) que *habrán de suprimirse los paréntesis, cambiando el signo de los términos que van dentro del paréntesis precedido del signo menos.*

Según esto, nos queda:

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Luego,

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

EJEMPLO:

$$(8-3)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 3 + 3^2 = 64 - 48 + 9 = 25$$

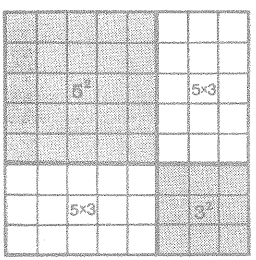


FIG. 9

101. Interpretaciones geométricas del cuadrado de la suma de dos números y de la suma de dos cuadrados. — Consideremos, por ejemplo, los números 5 y 3, y tratemos de interpretar geométricamente:

a) El cuadrado de su suma, $(5+3)^2$.

b) La suma de sus cuadrados, $5^2 + 3^2$.

Según hemos visto anteriormente,

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$$

Adoptemos un segmento que nos sirva de unidad y representemos gráficamente el valor indicado por cada uno de los tres términos que aparecen en el desarrollo. Tenemos en primer lugar 5^2, que, por ser una longitud al cuadrado, representa la superficie de un cuadrado de 5 unidades de lado (fig. 9). Viene luego dos veces el producto 5×3; cada uno de esos dos productos representa el área de un rectángulo de 5 unidades de base por 3 de altura. En la figura, se han colocado uno a derecha y otro debajo del cuadrado representado por 5^2. Queda finalmente el término 3^2, que representa un cuadrado de 3 unidades de lado. Colocado éste del modo que aparece en la figura, vemos que el conjunto de los dos cuadrados y de los dos rectángulos, forman un cuadrado de lado igual a $5 + 3 = 8$ unidades. Esto es precisamente lo que debía resultar, de acuerdo con el cálculo.

La interpretación geométrica de la suma de los cuadrados de 5 y 3, es por el contrario, no el cuadrado que tiene como lado $5 + 3 = 8$, sino la figura formada por los dos cuadrados punteados, 5^2 y 3^2.

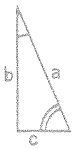


FIG. 10

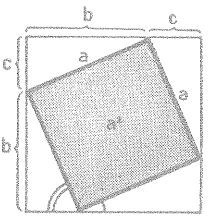


FIG. 11

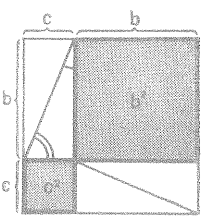


FIG. 12

102. Teorema de Pitágoras. — Supongamos un triángulo rectángulo cualquiera (fig. 10), y designemos por *a* la hipotenusa y por *b* y *c* los catetos.

Si construimos un cuadrado que tenga por lado la suma $b + c$ de los catetos y recortamos en papel, o cartulina, cuatro triángulos iguales al dado, estos triángulos, colocados en las esquinas del cuadrado del modo que se indica en la figura 11, dejan sin cubrir *un cuadrado* a^2, *de lado igual a la hipotenusa* a *del triángulo*. Sus ángulos, en efecto, son rectos, como es fácil observar.

Pero si disponemos los referidos triángulos tal como aparece en la figura 12, quedarán sin cubrir *dos cuadrados* b^2 *y* c^2, *cuyos lados* b *y* c *son los catetos del triángulo.*

Se deduce de lo anterior, que el cuadrado a^2 (fig. 11) es equivalente a la suma de los cuadrados b^2 y c^2 (fig. 12).

Esta importante propiedad de los triángulos rectángulos, se conoce con el nombre de TEOREMA DE PITÁGORAS, y su enunciado es como sigue:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

Como las áreas de los cuadrados construidos sobre *a*, *b* y *c*, son, respectivamente, a^2, b^2 y c^2, podemos escribir la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

expresión matemática del teorema de Pitágoras, el cual puede también enunciarse brevemente así:

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

De la fórmula anterior se deducen las siguientes:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

103. Producto de la suma de dos números por su diferencia.— Efectuemos el producto de la suma $a + b$ por la diferencia $a - b$. Considerando a ésta primeramente como un solo número, tendremos:

$$(a+b)(a-b) = (a-b)a + (a-b)b = a^2 - ab + ab - b^2$$

Como $ab - ab$ es igual a cero, queda en definitiva:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Luego,

El producto de la suma de dos números por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados.

EJEMPLO:

$$(9+5)(9-5) = 9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56$$

104. Aplicaciones al cálculo rápido.— 1.ª El cuadrado de la suma y el cuadrado de la diferencia de dos números, se utilizan para calcular rápidamente el cuadrado de números de varias cifras, próximos a números redondos.

EJEMPLOS:

$$109^2 = (100+9)^2 = 10.000 + 1.800 + 81 = 11.881$$
$$98^2 = (100-2)^2 = 10.000 - 400 + 4 = 9.604$$

2.ª El cálculo de la diferencia de dos cuadrados, resulta frecuentemente más sencillo convirtiéndolo en producto, aplicando para ello la propiedad inversa a la expresada en el párrafo anterior.

EJEMPLO:

$$79^2 - 21^2 = (79+21)(79-21) = 100 \times 58 = 5.800$$

EJERCICIOS

382. Obtener de dos maneras el valor de las siguientes expresiones:

$2^3 \times 2^4$; $3^2 \times 3^5$; $3^4 : 3^3$; $2^6 : 2^3$; $5^3 \cdot 5$

383. Indicar cuál es el valor representado por las siguientes expresiones:

$$5^0; \quad 13^0; \quad 72^0; \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^0; \quad \left(\tfrac{5}{8}\right)^0;$$

$$7^0 + 12; \quad 9(3+2)^0; \quad \frac{1}{3+4^0}; \quad \frac{8}{3^0+4^0}; \quad (6-2^0)(8^0-7^0)$$

384. Hallar de dos maneras el valor de las expresiones siguientes:

$$(3^3)^2; \quad (5^2)^2; \quad (4^3)^3; \quad (9^2)^3; \quad [(\tfrac{1}{2})^2]^3$$

385. Calcular de dos maneras el valor de los siguientes cuadrados:

$$(2+5)^2; \quad (3+7)^2; \quad (9+5)^2; \quad (11+12)^2; \quad (15+22)^2$$

386. Interpretar geométricamente $(4+7)^2$ y $4^2 + 7^2$.

387. Hallar de dos maneras el valor de los siguientes cuadrados:

$$(3-2)^2; \quad (9-3)^2; \quad (12-7)^2; \quad (16-9)^2; \quad (23-15)^2$$

388. Comprobar gráficamente el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo cuyos catetos miden, respectivamente, 3 y 4 cm., y la hipotenusa, 5 cm.

389. Calcular de dos maneras los siguientes productos:

$$(7+2)(7-2); \quad (13+9)(13-9); \quad (63+16)(63-16)$$

390. Calcular del modo más rápido posible el valor de las siguientes expresiones:

$$293^2; \quad 7.009^2; \quad 1.012^2; \quad 784^2 - 356^2; \quad 975^2 - 101^2$$

391. ¿Cuántas baldosas hay en una habitación cuadrada, si contadas las filas en un sentido hemos hallado 93?

392. Se divide un segmento en 3 partes iguales; luego, cada parte en otras 3, y así sucesivamente hasta 7 veces. Averiguar en cuántas partes se habrá dividido el segmento primero.

393. La suma de dos números es 116 y la diferencia de sus cuadrados, 928. ¿Cuáles son esos números?

394. Hallar dos números, sabiendo que su diferencia es 48 y la diferencia de sus cuadrados, 6.624.

395. Hallar un número, sabiendo que al sumarle 42, y al restarle 115, se obtienen los cuadrados de dos números consecutivos.

396. Al producto de dos números consecutivos hemos sumado el mayor y hemos obtenido 1.444. ¿Cuáles son esos dos números?

397. Al hacer una plantación de árboles, de manera que cada fila tuviera tantos árboles como filas habían de resultar, nos han sobrado 13. Si el lado del cuadrado formado hubiera tenido un árbol más, habrían faltado 44 árboles. ¿Cuántos árboles se plantaron?

398. De la relación $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, deducir que $(a+1)^2 - 1$ es divisible por a y por $a + 2$.

12. Raíz cuadrada

105. Radicación: definición, nomenclatura y notación. — La *radicación*, o *extracción de raíces*, es una operación aritmética inversa de la potenciación.

DEFINICIÓN. — *Radicación es la operación en la que, dados un número cualquiera que se llama radicando y un número natural denominado índice, hay que hallar otro número llamado raíz, que elevado a la potencia que expresa el índice, dé como resultado el radicando.*

Para indicar la radicación se emplea el signo $\sqrt{\ }$, llamado *signo radical*, en cuyo ángulo se escribe el índice, y debajo de la raya horizontal, el radicando.

EJEMPLO:

$\sqrt[4]{81}$; radicando = 81; índice = 4; raíz = 3

En efecto,

$\sqrt[4]{81} = 3$ pues $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

106. Raíz cuadrada. — *Raíz cuadrada de un número es otro número cuyo cuadrado es igual al primero.*

EJEMPLOS:

$\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{222.784} = 472$

En la raíz cuadrada, no se coloca el índice en el signo radical.

107. Raíz cuadrada exacta. — *Se dice de un número que tiene raíz cuadrada exacta, o que es cuadrado perfecto, cuando existe un número natural cuyo cuadrado es igual al radicando.*

Las raíces de los ejemplos anteriores son las tres exactas, ya que se verifica:

$8^2 = 64$; $13^2 = 169$; $472^2 = 222.784$

Por el contrario, si quisiéramos hallar la raíz cuadrada de 76, por ejemplo, nos encontraríamos con que no hay ningún número natural cuyo cuadrado sea 76. Esto se expresa diciendo que 76 no tiene raíz cuadrada exacta, o que no es cuadrado perfecto.

108. Propiedades. — De las leyes del cálculo con potencias se deducen las del cálculo con raíces. Así, tendremos las siguientes propiedades:

I. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DEL PRODUCTO:

La raíz cuadrada de un producto indicado es igual al producto de las raíces de los factores.

La raíz cuadrada del producto $49 \times 81 \times 144$, será $7 \times 9 \times 12$, ya que (93, II)

$$(7 \times 9 \times 12)^2 = 49 \times 81 \times 144$$

En general:

$$\sqrt{a \times b \times c} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$$

II. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DEL COCIENTE:

La raíz cuadrada de un cociente indicado es igual al cociente de las raíces del dividendo y divisor.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de cociente $121 : 64$, será $11 : 8$, ya que

$$(11 : 8)^2 = 121 : 64$$

En general,

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}.$$

109. Observación. — *Como la potenciación, la radicación no tiene la propiedad distributiva respecto de la suma ni respecto de la diferencia.*

$$\sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}, \quad \text{pues} \quad \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \text{y} \quad \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$$

$$\sqrt{25 - 9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}, \quad \text{pues} \quad \sqrt{25 - 9} = 4 \quad \text{y} \quad \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$$

110. Raíz cuadrada entera. — Son pocos, relativamente, los números que tienen raíz cuadrada exacta. Para los demás números, siempre es posible considerar la *raíz cuadrada entera* y la *raíz cuadrada aproximada con error menor de una unidad decimal.*

Llámase raíz cuadrada entera de un número, al mayor de los números enteros cuyo cuadrado puede ser restado del radicando.

A la raíz cuadrada entera se la llama también *raíz cuadrada con error menor que uno.*

Así, la raíz cuadrada entera de 87 será 9, porque $9^2 < 87 < 10^2$.

111. Resto de la raíz cuadrada. — *Resto de la raíz cuadrada entera es la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz entera.*

En $\sqrt{87}$, la raíz cuadrada entera es 9 y el resto, $87 - 9^2 = 6$.

VALOR MÁXIMO DEL RESTO.

El mayor valor que puede tener el resto, es el duplo de la raíz hallada.

Comprobemos esto gráficamente. Supongamos para ello que se trata de la raíz cuadrada entera de 34, que es 5, pues $5^2 < 34 < 6^2$. El resto ha de ser, por tanto, menor que la diferencia $6^2 - 5^2$. Pero esta diferencia equivale a $2 \times 5 + 1$. En efecto: Si a un cuadrado (figura 13) formado por $5^2 = 25$ cuadraditos le agregamos una fila y una columna, es decir, $5 + 5 = 2 \times 5$, cuadraditos, necesitaremos un cuadradito más para completar el nuevo cuadrado que se forma. Por tanto:

$$6^2 - 5^2 = 5 + 5 + 1 = 2 \times 5 + 1$$

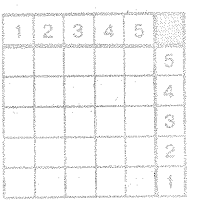


FIG. 13

Esto nos dice que *la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual al doble del menor, más uno.*

Ahora bien, como el resto ha de ser menor que esa diferencia, lo más que puede valer es 2×5.

112. Relaciones fundamentales. — En toda raíz cuadrada se han de verificar las siguientes relaciones, de acuerdo con lo dicho anteriormente:

1.ª El radicando es igual al cuadrado de la raíz, más el resto.
2.ª El resto ha de ser igual o menor que el duplo de la raíz.

En símbolos: Si la raíz cuadrada entera de N es a, y al resto lo representamos por r, ha de ser

$$N = a^2 + r \qquad \text{y} \qquad r \leqq 2a$$

EJERCICIOS

399. Expresar en forma de raíz las igualdades siguientes:

$$13^2 = 169; \quad 5^3 = 125; \quad 2^8 = 256; \quad n^2 = N; \quad m^3 = M$$

400. Expresar en forma de potencia las igualdades siguientes:

$$\sqrt{144} = 12; \quad \sqrt[3]{729} = 9; \quad \sqrt[5]{A} = a; \quad \sqrt{a+b} = n; \quad \sqrt{N} = a + b$$

401. ¿Qué valor han de tener a, b y c en las igualdades siguientes?

$$\sqrt{a} = 27, \quad \sqrt{8464} = b, \quad \sqrt[c]{64} = 2$$

402. ¿En qué cifras puede acabar un número que sea cuadrado perfecto?

403. Hallar el valor de las siguientes raíces: $\sqrt{100}$; $\sqrt{10.000}$; $\sqrt{1.000.000}$; $\sqrt[3]{1.000}$; $\sqrt[3]{1.000.000}$. ¿Cuándo la unidad seguida de ceros es cuadrado perfecto? ¿Cuándo es cubo perfecto?

404. Decir cuál es la raíz cuadrada, exacta o entera (en este caso, indicar el resto), de los siguientes números:

7.056; 5.101; 3.249; 2.380; 6.800

405. Íd. la raíz cuadrada de 9.409, 4.225, 2.100, 527 y 1.369.

406. ¿Cuántos números hay entre 30^2 y 31^2 que no sean cuadrados perfectos?

407. Un jardinero ha hecho una plantación de manera que cada fila tiene tantas plantas como filas hay. Averiguar de cuántas plantas consta esa plantación, sabiendo que hubiera necesitado otras 173 para que el lado del cuadrado formado tuviera una planta más.

408. La raíz cuadrada entera de un número es 17 y el resto 32. ¿En cuánto habrá que aumentar a ese número para que resulte un cuadrado perfecto?

409. Comprobar que la radicación no tiene la propiedad distributiva respecto de la suma y de la diferencia. Empléense estos ejemplos:

$$\sqrt{225 + 64}; \quad \sqrt{49 + 576}; \quad \sqrt{625 - 225}; \quad \sqrt{289 - 64}$$

13. Raíz cuadrada (continuación)

113. Práctica de la raíz cuadrada. — Observemos que

$$\sqrt{1} = 1 \quad \text{pues} \quad 1^2 = 1$$

$$\sqrt{100} = 10 \quad \text{pues} \quad 10^2 = 100$$

$$\sqrt{10.000} = 100 \quad \text{pues} \quad 100^2 = 10.000$$

$$\sqrt{1.000.000} = 1.000 \quad \text{pues} \quad 1.000^2 = 1.000.000$$

De estas igualdades se deduce que la raíz cuadrada de los números

1 a 99, es decir, de 1 y 2 cifras, tiene *una* cifra
100 a 9.999, es decir, de 3 y 4 cifras, tiene *dos* cifras
10.000 a 999.999, es decir, de 5 y 6 cifras, tiene *tres* cifras

y así sucesivamente.

Resulta, por tanto, que *si a un número entero le dividimos en grupos de a dos cifras, empezando por la derecha, el número de grupos formados indicará el de cifras de su raíz cuadrada.*

Así, por ejemplo, la raíz cuadrada de 124,572.300 tendrá 5 cifras, ya que se pueden formar los cinco grupos siguientes: 1, 24, 57, 23, 00.

En el estudio de la extracción de la raíz cuadrada, conviene considerar dos casos, según que el número de que se trate sea menor o mayor que 100.

PRIMER CASO: **Hallar la raíz de un número menor que 100.** — El problema se resuelve mentalmente sabiendo de memoria los cuadrados de los diez primeros números.

Así,

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{pues} \quad 7^2 = 49$$

$\sqrt{84} = 9$, con 3 de resto, ya que $9^2 = 81$, a 84, 3.

SEGUNDO CASO: **Hallar la raíz de un número mayor que 100.** — Supongamos primeramente que se trata de un número que consta de tres o cuatro cifras. Su raíz, como sabemos, tendrá dos cifras: decenas y unidades. Veamos cómo se pueden calcular.

a) **Determinación de la cifra de las decenas.** — Sea, por ejemplo, el número 3.249, cuya raíz cuadrada exacta (que supondremos hallada) es 57. Según esto, podemos escribir:

$$3.249 = 57^2 = (50+7)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 7 + 7^2 \qquad [I]$$

De las 32 centenas del número 3.249, { 25 se hallan contenidas en el primer término del desarrollo, pues $50^2 = 2.500$, y 7 en el segundo término, ya que $2 \times 50 \times 7 = 700$.

Es decir, que la mayor parte de las centenas del número dado están contenidas en el primer término del desarrollo. Aproximadamente, se podrá escribir que

$$3.200 = 50^2 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{32} = 5$$

Luego, *para hallar la cifra de las decenas de la raíz, se separan dos cifras* (49) *de la derecha del número dado, y se extrae la raíz cuadrada del grupo que quede a la izquierda* (32). *El resultado* (5) *serán las decenas de la raíz.*

$\sqrt{32.49}$	$50 + 7 = 57$
2500	$50^2 = 2.500$
749	$(2 \times 50 + 7)\,7 =$
749	$= 107 \times 7 = 749$
0	

b) **Determinación de la cifra de las unidades de la raíz.** — Restando 50^2 a los dos miembros de la igualdad [I], se obtiene

$$3.249 - 50^2 = 2 \times 50 \times 7 + 7^2$$

Efectuando ahora operaciones en el primer miembro de esta igualdad, y sacando el 7 factor común en el segundo miembro, resulta

$$749 = (2 \times 50 + 7)\,7 = 107 \times 7 \qquad [II]$$

El primer miembro de esta igualdad es el resto del radicando después de restar 50^2. El segundo miembro consta de dos factores: el primero está formado por el doble (10) de la cifra ya hallada de la raíz (5), seguido de la cifra de las unidades (7); el segundo es la misma cifra de las unidades.

Dividiendo 749 por 107, tendríamos la cifra de las unidades (749 : 107 = 7), pero como ésta figura también en el divisor, y antes de calcularla nos es desconocida, nos contentaremos con dividir las decenas (74 : 10). La cifra que resulte de este cociente ha de ser comprobada según la igualdad [II]; si al comprobarla resultase en el segundo miembro un número mayor que el resto (749), la rebajaremos en una unidad y la volveríamos a comprobar de igual modo, hasta que diera un número igual o menor que dicho resto.

EJEMPLO II. — Hallar la raíz cuadrada del número 120.409.

$\sqrt{1\,2.0\,4.0\,9}$	**347**
-9	$3^2 = 9$
$3\,0.4$	$64 \times 4 = 256$
$-2\,5\,6$	
$4\,8\,0.9$	$687 \times 7 = 4809$
$-4\,8\,0\,9$	
0	

REGLA. — Para extraer la raíz cuadrada de un número entero mayor que 100:

1.° *Se le divide en grupos de dos cifras, comenzando por la derecha* (en el ejemplo del margen: 3, 05, 63, 47); *el primer grupo de izquierda puede tener una o dos cifras.*

DISPOSICIÓN PRACTICA

$\sqrt{3.0\,5.6\,3.4\,7}$	1748
-1	
$2\,0.5$	$27 \times 7 = 189$
$-1\,8\,9$	
$1\,6\,6.3$	$344 \times 4 = 1376$
$-1\,3\,7\,6$	
$2\,8\,7\,4.7$	$3488 \times 8 = 27904$
$-2\,7\,9\,0\,4$	
$8\,4\,3$	

2.° *Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda* ($\sqrt{3} = 1$) *y el resultado será la primera cifra de la raíz; se eleva ésta al cuadrado y el resultado se resta del primer grupo* ($3 - 1^2 = 2$).

3.° *A la derecha del resto se baja el grupo siguiente* (205), *se separan las decenas y se dividen por el duplo de la raíz hallada* ($20 : 2 = 10$).

El cociente (*) *se escribe a la derecha del divisor, y el número así formado se multiplica por el mismo cociente* ($29 \times 9 = 261$). *Si el producto obtenido es mayor que el radicando parcial* (205), *se rebaja el cociente en una unidad y se multiplica como antes* ($28 \times 8 = 224$); *se procede así hasta obtener un producto* ($27 \times 7 = 189$) *que se pueda restar del radicando parcial* ($205 - 189 = 16$). *La última cifra probada* (7) *es la segunda cifra de la raíz.*

4.° *A la derecha de la diferencia* (16) *se baja el grupo siguiente* (1663), *se separan las decenas y se dividen por el duplo de toda la raíz hallada* ($166 : 34 = 4$) *y con el cociente se hace lo mismo que con el cociente anterior.*

(*) Aunque resulte, como en el ejemplo, un cociente igual a 10, se empieza siempre probando la cifra 9

5.° *Se continúa del mismo modo la operación hasta bajar todos los grupos del radicando y obtener la última cifra de la raíz. El último resto* (843) *es el resto de la operación, cuando la raíz no es exacta.*

6.° *Cuando al bajar alguno de los grupos y separar las decenas, sucede que el número formado por éstas es menor que el duplo de la parte de raíz hallada, se pone un cero en la raíz y se baja el grupo siguiente.*

114. Prueba de la raíz cuadrada. — En virtud de las relaciones establecidas (112), si la operación está bien hecha:

1.° *El cuadrado de la raíz, más el resto, ha de ser igual al radicando.*

2.° *El resto ha de ser igual o menor que el duplo de la raíz.*

Así ocurre en el ejemplo anterior, pues

$$1.748^2 + 843 = 3.056.347 \qquad \text{y} \qquad 843 < 2 \times 1.748$$

115. Raíz cuadrada de una fracción. — *La raíz cuadrada de una fracción irreducible cuyos términos son cuadrados perfectos, es otra fracción, obtenida al extraer separadamente la raíz cuadrada del numerador y denominador.*

En efecto: si suponemos $a = p^2$ y $b = q^2$, se verificará que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q} \quad \text{puesto que (núm. 92)} \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{a}{b}$$

EJEMPLO:

$$\sqrt{\frac{98}{162}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}, \text{ ya que } \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{7^2}{9^2} = \frac{49}{81}$$

Cuando los términos de una fracción irreducible no son cuadrados perfectos, no admite ninguna otra fracción por raíz cuadrada exacta.

En este caso, se calcula la raíz *aproximada con error menor de una unidad decimal*, como veremos en el párrafo siguiente.

116. Raíz cuadrada aproximada con error menor que una unidad decimal. — De ordinario, no es suficiente la extracción de la raíz cuadrada entera, sino que es preciso mayor aproximación. Por eso, hemos de definir y calcular la raíz cuadrada de un número con error menor que una unidad decimal.

DEFINICIÓN. — *Extraer la raíz cuadrada aproximada, de un número que no es cuadrado perfecto, con error menor que* 0'1, 0'01, 0'001, ..., etc., *es hallar el mayor decimal con una, dos, tres, ..., etc., cifras decimales, respectivamente, cuyo cuadrado puede ser restado del número considerado.*

Diremos, por ejemplo, que 6'928 es la raíz cuadrada aproximada de 48, con error menor que 0'001, porque es el mayor decimal con 3 cifras decimales, cuyo cuadrado puede ser restado de 48. Se tiene, en efecto:

$$6'928^2 = 47'997184 < 48 < 6'929^2 = 48'011041$$

REGLA. — *Para extraer la raíz cuadrada aproximada de un número no cuadrado perfecto, con error menor que* 0'1, 0'01, 0'001, ... *etc., se multiplica dicho número por* 100, 10.000, 1.000.000, ... *(en general, por la unidad seguida de un número de ceros igual al doble del de cifras decimales que se desean en la raíz). Se extrae la raíz cuadrada de la parte entera obtenida, y de dicha raíz se separan las cifras decimales deseadas.*

EJEMPLO. — Hallar la raíz cuadrada de 48 con error menor que 0'001, es decir con tres decimales.

Procederemos así:

1.º Se multiplica 48 por 1.000.000. Obtenemos 48.000.000.

2.º Se calcula la raíz cuadrada entera de 48.000.000. Resulta 6.928.

3.º Se separan tres cifras decimales (tantas como tiene la aproximación), obteniéndose 6'928.

He aquí cómo dispondremos el cálculo:

$\sqrt{48.00.00.00}$	6928
-36	
1200	$129 \times 9 = 1161$
-1161	
3900	$1382 \times 2 = 2764$
-2764	
113600	$13848 \times 8 = 110784$
-110784	
2816	

Solución: $\sqrt{48} = 6'928$, con error $< 0'001$

Se demuestra que 6'928 es la raíz cuadrada de 48 con error menor que 0'001, observando que, por ser 6.928 la raíz entera de 48.000.000, se verificará la desigualdad

$$6.928^2 < 48.000.000 < 6.929^2$$

y dividiendo por 1.000.000 a los tres miembros,

$$\frac{6.928^2}{1.000.000} < 48 < \frac{6.929^2}{1.000.000}$$

desigualdad que puede escribirse también así:

$$\left(\frac{6.928}{1.000}\right)^2 < 48 < \left(\frac{6.929}{1.000}\right)^2$$

o bien, de esta forma:

$$6'928^2 < 48 < 6'929^2$$

Esta última desigualdad, de acuerdo con la definición de raíz cuadrada aproximada, demuestra lo que pretendíamos.

RAÍZ CUADRADA APROXIMADA DE UN NÚMERO DECIMAL. — Razonando de modo análogo, se demostraría que para hallar la raíz cuadrada, por ejemplo de 2'769432, con error menor que 0'01, habrá que multiplicar por 10.000 a dicho número, y luego se hallará la raíz de la parte entera que resulte, es decir, de 27.694, con lo que obtendríamos 166. Finalmente, separaremos dos decimales en esta raíz, obteniéndose 1'66 como $\sqrt{2'769432}$, con error $< 0'001$.

OBSERVACIÓN. — Cuando no se señala la aproximación con que ha de extraerse la raíz cuadrada de un número decimal, se entiende que han de sacarse en la raíz *tantas cifras decimales como grupos de dos cifras decimales* tiene el número en cuestión. Si el último grupo consta de una sola cifra, se le completa añadiendo *un cero*.

EJERCICIOS

410. Hallar los números cuyos cuadrados son 1.024, 29.241 y 21.715.600.

411. Extraer la raíz cuadrada de los siguientes números:

33.124; 797.449; 2.134.521; 16.581.184; 256.096.009

412. Extraer la raíz cuadrada entera de los siguientes números, indicando el resto de la operación:

22.567; 573.205; 4.311.612; 18.693.452; 642.031.957

413. Decir cuáles de entre las siguientes fracciones tienen raíz cuadrada exacta y expresarla:

$$\frac{4}{9};\ \frac{25}{64};\ \frac{48}{243};\ \frac{36}{121};\ \frac{23}{57};\ \frac{63}{1792};\ \frac{49}{343};\ \frac{961}{7744}$$

414. Hallar la raíz cuadrada aproximada con error menor que 0'001, de los números siguientes:

$$3;\ 7;\ 2'9;\ 4'52;\ 0'075;\ \frac{5}{12};\ \frac{19}{15};\ \frac{24}{25}$$

415. Hallar el valor de las siguientes expresiones con aproximación hasta las centésimas: ($\pi = 3'1415927...$)

$$\sqrt{\pi};\qquad \sqrt{\pi : 2};\qquad \sqrt{\pi : 3};\qquad \sqrt{\pi : 4}$$

416. Extraer la raíz cuadrada de los siguientes números:

$$356'0769;\quad 550'2213;\quad 0'00739;\quad 0'0005640625$$

417. Una habitación cuadrada está embaldosada con 6.084 baldosas. ¿Cuántas baldosas habrá en cada fila?

418. La superficie de España es de 505.545 Km². ¿Cuál sería la longitud del lado de un cuadrado equivalente? Expresar el resultado en metros.

419. Se quiere efectuar una formación en cuadro con 4.800 soldados. ¿Cuántos habrá que colocar en cada fila? ¿Cuántos sobran?

420. Disponemos de 39.650 pinos para llevar a cabo una plantación en un terreno que tiene forma cuadrada. ¿Cuántos pinos podremos poner en cada fila? ¿Cuántos sobrarán?

421. Si quisiéramos transformar en cuadrado un terreno rectangular que tiene 192 metros de longitud por 48 de anchura, ¿en cuánto sería preciso aumentar la anchura y disminuir la longitud?

422. Demostrar que el producto de los términos de toda fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ es igual a 6 por el cuadrado de un número. Hallar la fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ cuyos términos tienen por producto el número 2.166.

14. Proporciones

117. Razón de dos números. — *Se llama razón de dos números al cociente indicado de los mismos.*

La razón de dos números a y b se indica por la notación $\frac{a}{b}$, que se lee «a es a b»; el primer término, a, se denomina *antecedente*, y el segundo, b, *consecuente*.

Una razón y una fracción se diferencian en que los dos términos de la primera pueden ser números cualesquiera: enteros, decimales o fraccionarios, mientras que los de una fracción, por definición han de ser siempre números enteros.

Toda razón cuyos términos no son enteros, se puede reducir fácilmente a fracción ordinaria.

EJEMPLOS:

$$\frac{0'56}{7'2} = \frac{56}{100} : \frac{72}{10} = \frac{560}{7200} = \frac{7}{90}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{16}{15}$$

Valor de una razón es el cociente exacto de sus términos, o sea, el número que multiplicado por el denominador da el numerador.

Así, el valor de la razón $\frac{12}{3}$ es 4, porque $4 \times 3 = 12$; y el de la razón $\frac{7}{8}$ es $\frac{7}{8}$, porque $\frac{7}{8} \times 8 = 7$.

Las razones poseen las mismas propiedades que las fracciones, y las operaciones con ellas están sometidas a idénticas reglas.

Dos razones se dice que son inversas, cuando el numerador de una es denominador de la otra, y recíprocamente.

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{4}{3}; \qquad \frac{9}{5} \text{ y } \frac{5}{9}; \qquad \frac{a}{b} \text{ y } \frac{b}{a}$$

El producto de dos razones inversas es siempre 1.

En efecto:

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 3} = 1$$

118. Proporción numérica. — *Se denomina proporción a la igualdad de dos razones.*

EJEMPLOS:

$$\frac{4}{7} = \frac{24}{42}; \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{5}; \qquad \frac{0'16}{2'5} = \frac{8}{125}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Los cuatro números que intervienen en una proporción reciben el nombre de *términos;* el primero y el cuarto son términos opuestos, y se llaman *extremos;* el segundo y el tercero, que son también opuestos entre sí, se denominan *medios.*

Así, en el último ejemplo, que es la forma general de escribir una proporción,

a es el primer término, b el segundo, c el tercero y d el cuarto;

a y d son los extremos, y b y c, los medios;

a y c son los numeradores o antecedentes, y b y d, los denominadores o consecuentes.

La proporción a que nos referimos se escribe también así $a : b = c : d$, y se lee «a es a b como c es a d».

119. Propiedad fundamental de las proporciones. — Sea la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por el producto $b \times d$ de los denominadores, tendremos:

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d}$$

y, simplificando,

$$\boxed{a \times d = c \times b}$$

es decir:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Comprobemos esta propiedad en las proporciones numéricas que nos han servido de ejemplo en el párrafo anterior:

$$4 \times 42 = 168 = 7 \times 24; \quad \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3} = \frac{5}{6} \times 4; \quad 0'16 \times 125 = 20 = 2'5 \times 8$$

120. Recíprocamente: *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro factores podremos formar una proporción, en la que serán términos opuestos los factores de cada producto.*

Supongamos cuatro números, a, b, c y d, en los que se da la condición de ser $a \times d = b \times c$.

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por el producto $b \times d$, formado por un factor de cada miembro, resulta

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d} \quad \text{y, simplificando,} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

EJEMPLO. — Como $7 \times 56 = 392$ y $8 \times 49 = 392$

o sea, que $7 \times 56 = 8 \times 49$

podemos formar la proporción

$$\frac{7}{8} = \frac{49}{56}$$

121. Cálculo de un término de una proporción. — Podemos calcular un término de una proporción, cuando se conocen los otros tres.

En efecto: consideremos la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

de la cual se deduce, según el teorema fundamental,

$$a \times d = b \times c$$

Si dividimos ahora los dos miembros de esta igualdad, sucesivamente, por d, c, b y a, obtendremos:

$$a = \frac{b \times c}{d}; \qquad b = \frac{a \times d}{c}; \qquad c = \frac{a \times d}{b}; \qquad d = \frac{b \times c}{a}$$

O sea:

En toda proporción, el valor de un término es igual al cociente de dividir por el opuesto el producto de los otros dos.

122. **Cuarto proporcional.** — *Se llama cuarto proporcional a tres números, dados en un orden determinado, al cuarto término de una proporción cuyos tres primeros términos son los tres números, en el orden en que se dieron.*

EJEMPLO. — El cuarto proporcional a los números 1'3, 4 y 6'5, es el término designado por x en la proporción

$$\frac{1'3}{4} = \frac{6'5}{x}$$

SU VALOR. — Según el párrafo precedente, será

$$x = \frac{4 \times 6'5}{1'3} = 20$$

De ahí que digamos:

El cuarto proporcional a tres números dados, es igual al cociente de dividir por el primero el producto de los otros dos.

123. **Proporción continua.** — *Se llama proporción continua a aquella proporción que tiene iguales los dos medios o los dos extremos.*

EJEMPLOS:

$$\frac{16}{12} = \frac{12}{9}; \qquad \frac{6}{30} = \frac{1'2}{6}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

124. **Media proporcional.** — *Se llama media proporcional (o media geométrica) entre dos números, al término que se repite en una proporción continua, en la que los otros dos términos son los números dados.*

EJEMPLO. — La media proporcional entre los números 6'25 y 25, es el término x que se repite en la proporción

$$\frac{6'25}{x} = \frac{x}{25}$$

SU VALOR. — Aplicando la propiedad fundamental, resulta

$$x \cdot x = 6'25 \times 25, \quad \text{o bien,} \quad x^2 = 6'25 \times 25$$

y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros, se obtiene

$$x = \sqrt{6'25 \times 25} = \sqrt{156'25} = 12'5$$

Por tanto:

La media proporcional entre dos números, es igual a la raíz cuadrada del producto de los mismos.

125. Tercero proporcional. — *Tercero proporcional a dos números, es el cuarto término de una proporción, en la cual un extremo es el primero de los números dados, y los dos medios son iguales al segundo de dichos números.*

EJEMPLO. — El tercero proporcional a los números 6'84 y 11'4, es el término designado por x en la proporción

$$\frac{6'84}{11'4} = \frac{11'4}{x}$$

SU VALOR. — Según el párrafo 125, será

$$x = \frac{11'4 \times 11'4}{6'84} = \frac{11'4^2}{6'84} = 19$$

126. Proporciones deducidas de otra. — Como consecuencia de la propiedad fundamental y del recíproco de esa misma propiedad, en toda proporción podemos:

1.° *Invertir el orden de los términos opuestos.* Así, permutando primero los medios, luego los extremos, y por fin los medios y extremos a la vez, vemos que

$$\text{de } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se deduce: } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ y } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

2.° *Sustituir en cada proporción las dos razones por sus inversas.* Según esto, de las cuatro proporciones anteriores se deducen las cuatro siguientes:

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}; \qquad \frac{b}{d}=\frac{a}{c}; \qquad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}; \qquad \frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

En resumen: *Si cuatro números forman proporción, puede ésta escribirse de ocho maneras distintas.*

Obsérvese, sin embargo, que de las ocho proporciones que pueden formarse con cuatro números, cuatro de ellas difieren de las otras cuatro únicamente en el orden de colocación de las razones.

EJERCICIOS

423. Hallar: 1.°, tres razones iguales a $\frac{5}{8}$; 2.°, otras tres iguales a $\frac{1485}{3465}$ de términos menores.

424. Partiendo de cada una de las siguientes razones, escríbase una proporción:

$$\frac{4}{9}; \quad \frac{11}{25}; \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}; \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}; \quad \frac{0'14}{0'3}; \quad \frac{3'8}{51'2}$$

425. Comprobar la propiedad fundamental en las proporciones halladas en el ejercicio anterior.

426. Teniendo en cuenta las siguientes igualdades, formar de cada una de ellas una proporción:

$2 \times 27 = 6 \times 9$; $8 \times 18 = 12^2$; $1'6 \times 3'75 = 9 \times \frac{2}{3}$; $0'8 \times 21 = 6 \times 2'8$

427. Calcular el término representado por x en las proporciones siguientes:

$$\frac{2}{x}=\frac{18}{54}; \quad \frac{2'5}{x}=\frac{x}{8'1}; \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{7}{8}}{x}; \quad \frac{2'4}{x}=\frac{x}{9'6}$$

428. Hállese: 1.°, el cuarto proporcional a 0'5, 0'14 y 25; 2.°, la media proporcional entre 4'5 y 2; 3.°, el tercero proporcional a 5 y 17.

429. Deducir de las proporciones siguientes otras siete, con sólo cambiar de lugar los términos:

$$\frac{3}{4}=\frac{12}{16}; \quad \frac{125}{35}=\frac{25}{7}; \quad \frac{210}{10}=\frac{14}{\frac{2}{3}}; \quad \frac{3}{12}=\frac{2'5}{10}$$

15. Series de razones iguales

127. Definiciones. — *Llamamos serie de razones iguales a una expresión de la forma*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots$$

en la que a, b, c, d, e, f, g, h,... *representan números cualesquiera, distintos de cero.*

EJEMPLOS:

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{9}{18}; \qquad \frac{1'3}{3'9} = \frac{2}{6} = \frac{3'4}{10'2}$$

El valor común de todas las razones que componen la serie se denomina constante de proporcionalidad. Nosotros la designaremos por k.

En el primero de los ejemplos dados anteriormente, $k = \frac{1}{2}$, y en el segundo, $k = \frac{1}{3}$.

128. Propiedades. — 1.ª *En toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes, dividida por la de los consecuentes, es igual a cada una de las razones.*

En efecto: consideremos la serie

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

y sea k la constante de proporcionalidad.

Como el dividendo es igual al divisor por el cociente, se verificará:

$$a = a' \times k; \qquad b = b' \times k; \qquad c = c' \times k \qquad [A]$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y sacando el factor común k en el resultado, se obtiene

$$a + b + c = k(a' + b' + c')$$

y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $a' + b' + c'$, resulta

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = k, \quad \text{o sea,} \quad \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

como se quería demostrar.

2.ª *En una serie de razones iguales, la diferencia de los antecedentes, dividida por la de los consecuentes, es igual a cada una de las razones.*

En efecto: si en el razonamiento anterior, restamos las igualdades [A], en vez de sumarlas, obtendríamos

$$\frac{a-b-c}{a'-b'-c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

OBSERVACIÓN. — Para aplicar esta segunda propiedad, hay que suponer que es posible efectuar la diferencia de antecedentes y consecuentes, y que dicha diferencia no es igual a cero.

EJEMPLO. — Comprobando las propiedades anteriores en la serie

$$\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

resulta, efectivamente:

$$\frac{8+4+2}{12+6+3} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{8-4-2}{12-6-3} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

129. Caso particular. — Cuando se trata de una serie formada únicamente por dos razones, es decir, de la proporción

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \qquad [B]$$

las dos propiedades antes enunciadas dan lugar a estos resultados:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \dfrac{a+b}{a'+b'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \\ 2) & \dfrac{a-b}{a'-b'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \end{array}\right\} \text{ de donde, } \quad 3) \quad \frac{a+b}{a'+b'} = \frac{a-b}{a'-b'}$$

y permutando los medios en 3), se obtiene

$$4) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{a'+b'}{a'-b'}$$

Por otra parte, sumando y restando, sucesivamente, la unidad a los dos miembros de la igualdad [B], los resultados que se obtengan serán iguales, y tendremos:

$$\frac{a}{a'} + 1 = \frac{b}{b'} + 1, \quad \text{o sea,} \quad 5) \quad \frac{a + a'}{a'} = \frac{b + b'}{b'}$$

$$\frac{a}{a'} - 1 = \frac{b}{b'} - 1, \quad \text{o sea,} \quad 6) \quad \frac{a - a'}{a'} = \frac{b - b'}{b'}$$

Expresadas en lenguaje ordinario, las anteriores propiedades se enuncian así:

1) **En toda proporción, la suma de los antecedentes, partida por la de los consecuentes, es igual a cada una de las razones.**

2) **En toda proporción, la diferencia de los antecedentes, partida por la de los consecuentes, es igual a cada una de las razones.**

3) **En toda proporción, la suma de los antecedentes, partida por la de los consecuentes, es igual a la diferencia de los antedentes, partida por la de los consecuentes.**

4) **En toda proporción, la suma de los antecedentes, partida por su diferencia, es igual a la suma de los consecuentes, partida por su diferencia.**

5) **En toda proporción, la suma del antecedente y consecuente de la primera razón, partida por el consecuente, es igual a la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón, partida por el consecuente.**

6) **En toda proporción, la diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón, partida por el consecuente, es igual a la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón, partida por el consecuente.**

130. Medio aritmético. — *Denominamos medio aritmético, media aritmética, o promedio de varios números, al cociente de dividir la suma de dichos números por el número de sumandos.*

EJEMPLO. — El medio aritmético de los números 8, 12, 20 y 32, será

$$\frac{8 + 12 + 20 + 32}{4} = 18$$

131. Aplicaciones. — Calcular el medio aritmético de varios números, equivale a hallar un valor intermedio entre el menor y el mayor, de modo que pueda sustituirse cada uno de los números considerados por dicho valor, sin que el resultado de la suma se modifique.

Así, en el ejemplo anterior, se verifica:

$$8 + 12 + 20 + 32 = 72 \quad \text{y} \quad 18 + 18 + 18 + 18 = 72$$

Por tanto, una aplicación del medio aritmético, es la de hallar un número que sirva para caracterizar a una serie de valores y pueda sustituirlos.

EJEMPLO. — Un alumno que en las diferentes quincenas del curso obtuvo las calificaciones 7, 6, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 5, 9, 3, 4, 4, 7, 7, en una asignatura, le corresponde al final la nota media de

$$\frac{7 + 6 + 5 + 6 + 6 + 6 + 7 + 8 + 5 + 9 + 3 + 4 + 4 + 7 + 7}{15} = \frac{90}{15} = 6$$

Como veremos más adelante, al estudiar las *mezclas* y *aleaciones*, el cálculo del llamado precio medio y de la ley de una aleación, se reduce a hallar el medio aritmético de varios números.

132. Comparación del medio aritmético con el medio proporcional de dos números. — Consideremos dos números desiguales cualesquiera, 16 y 4 por ejemplo, y comparemos el valor de su medio aritmético con el de su medio proporcional.

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Medio aritmético de 16 y 4} = \dfrac{16 + 4}{2} = 10 \\ \text{Medio proporcional de 16 y 4} = \sqrt{16 \times 4} = 8 \end{array}\right\} \; 10 > 8$$

Al comparar los dos medios, vemos, por tanto, que el medio aritmético es mayor que el medio proporcional.

Igual sucedería con cualquier otro par de números, por lo que, designando a éstos por a y b, podemos escribir, en general:

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{a \times b}$$

desigualdad que expresamos mediante la siguiente proposición:

Tratándose de números desiguales, el medio aritmético de dos números es siempre mayor que el medio proporcional.

Si los números a y b son iguales, la desigualdad anterior se convierte en igualdad, lo cual significa que en ese caso particular, *los dos medios, aritmético y proporcional, son iguales.*

En efecto: suponiendo $a = b$, se tiene:

$$\frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a \qquad \text{y} \qquad \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a$$

133. Serie de razones desiguales. — *Denominamos serie de razones desiguales a una expresión de la forma*

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \neq \frac{e}{f} \neq \frac{g}{h} \neq \ldots$$

en la que a, b, c, d, e, f, g, h,... *son números cualesquiera, distintos de cero.*

EJEMPLOS:

$$\frac{1}{3} \neq \frac{3}{4} \neq \frac{5}{6} \neq \frac{7}{8}; \qquad \frac{1'2}{0'4} \neq \frac{6}{7} \neq \frac{5}{9}$$

134. Propiedad importante. — *En toda serie de razones desiguales, la suma de los antecedentes, partida por la de los consecuentes, es igual a una razón cuyo valor está comprendido entre la mayor y la menor de las razones consideradas.*

Sea, por ejemplo, la serie

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \quad \text{en la que suponemos} \quad \frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'}$$

Si designamos por k el valor de la primera razón, se verificará:

$$\frac{a}{a'} = k \qquad \text{de donde} \qquad a = a' \times k$$

$$\frac{b}{b'} > k \qquad \text{de donde} \qquad b > b' \times k$$

$$\frac{c}{c'} > k \qquad \text{de donde} \qquad c > c' \times k$$

Sumando ordenadamente la igualdad de derecha con las desigualdades que figuran debajo, y sacando el factor común k, se obtiene

$$a + b + c > k(a' + b' + c')$$

y dividiendo los dos miembros de esta desigualdad por $a' + b' + c'$, resulta

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} > k, \quad \text{esto es,} \quad \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} > \frac{a}{a'} \qquad [A]$$

De manera análoga, representando por k' el valor de la razón mayor, podemos probar que

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < k' \quad \text{o sea,} \quad \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'} \qquad [B]$$

Reuniendo en una sola las desigualdades [A] y [B], tendremos

$$\frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'}$$

como se pretendía demostrar.

EJERCICIO. — Compruébese esta propiedad en los ejemplos del párrafo anterior.

EJERCICIOS

430. De las series de razones siguientes, deducir tantas proporciones como razones hay, aplicando la 1.ª propiedad (núm. 128):

$$\frac{4}{12} = \frac{7}{21} = \frac{9}{27} = \frac{13}{39}; \qquad \frac{0'5}{1'5} = \frac{0'7}{2'1} = \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$$

431. De las series de razones siguientes, deducir tantas proporciones como razones hay, aplicando la 2.ª propiedad (núm. 128):

$$\frac{9}{36} = \frac{0'7}{2'8} = \frac{0'5}{2} = \frac{1}{4}; \qquad \frac{4'5}{9} = \frac{1}{2} = \frac{0'5}{0'25} = \frac{3}{6}$$

432. Deducir de las proporciones siguientes otras seis, sumando o restando los antecedentes y consecuentes:

$$\frac{7}{3} = \frac{3\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}; \qquad \frac{18}{4} = \frac{4\frac{1}{2}}{1}; \qquad \frac{4\frac{1}{2}}{67\frac{1}{2}} = \frac{1}{15}; \qquad \frac{1'6}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{3'75}$$

433. Dadas las series de razones iguales

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{36} = \frac{y}{60} = \frac{z}{72}$$

averiguar los valores x, y, z, sabiendo que en la primera la suma $x + y + z$ es igual a 165, y en la segunda a 42.

434. Dadas las siguientes proporciones:

$$a)\ \frac{x}{y} = \frac{5}{6} \qquad b)\ \frac{3}{4} = \frac{x}{y} \qquad c)\ \frac{x}{y} = \frac{11}{3} \qquad d)\ \frac{5}{2} = \frac{x}{y}$$

calcular x e y, sabiendo que en *a)* $x + y = 121$, en *b)* $x + y = 63$, en *c)* $x - y = 56$ y en *d)* $x - y = 27$.

435. Hallar dos números cuya razón es igual a $\frac{3}{8}$ y su suma es 132.

436. Hallar dos números cuya razón es igual a $\frac{5}{2}$ y su diferencia 39.

437. ¿Qué nota media sacó un alumno en Matemáticas, si en las veces que fue preguntado obtuvo las calificaciones 4, 7, 6, 5, 6, 4, 3 y 7?

438. Comprobar con los números 15 y 540 que el medio aritmético es mayor que el medio proporcional.

439. Entre los números tomados de dos en dos cuya suma es igual a 180, ¿qué par es el que da un producto mayor?

440. Entre los números tomados de dos en dos cuyo producto es igual a 5.329, ¿qué par es el que da una suma menor?

441. En la serie de razones desiguales $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, comprobar la propiedad fundamental

16. Proporcionalidad de magnitudes

135. Razón de dos cantidades homogéneas. — Consideremos los segmentos a y b (fig. 14). Al comparar estas dos longitudes, vemos que a es igual a 3 veces b, es decir, que la medida de a, tomando b como unidad, es el número 3.

FIG. 14

Esto se expresa, indistintamente, diciendo que b multiplicado por 3 es igual a a, o que la razón o relación de las longitudes a y b es igual a 3, y lo representamos así:

$$a = 3\,b \qquad \text{o bien} \qquad \frac{a}{b} = 3$$

Sean ahora los segmentos c y d (fig. 15). El primero no contiene un número exacto de veces al segundo, pero sí a su quinta parte, ya que

$$c = 9 \times \frac{1}{5}\,d = \frac{9}{5}\,d \qquad \text{o, de otro modo,} \qquad \frac{c}{d} = \frac{9}{5}$$

FIG. 15

Hemos comparado dos longitudes, pero la conclusión hubiera sido la misma de haber elegido dos superficies, dos volúmenes, dos pesos y, en general, dos cantidades homogéneas.

En todos los casos, diremos:

DEFINICIÓN. — *Razón de dos cantidades homogéneas, es el número abstracto por el que se ha de multiplicar la segunda para obtener la primera.*

O, también: *Razón de dos cantidades homogéneas, es el número abstracto que expresa las veces que la primera contiene a la segunda, es decir, la medida de la primera, al tomar a la segunda por unidad.*

136. Propiedad fundamental. — Si nos dan dos cantidades homogéneas, por ejemplo dos superficies, no es fácil hallar a simple vista por qué número se ha de multiplicar a una de ellas para que nos resulte la otra. Vamos a deducir, no obstante, una propiedad que nos permitirá calcular fácilmente ese número, es decir, la razón de las dos cantidades consideradas.

Supongamos las superficies A y B (fig. 16), cuyas medidas son, respectivamente, 12 y 16, al tomar por unidad el cuadrado C.

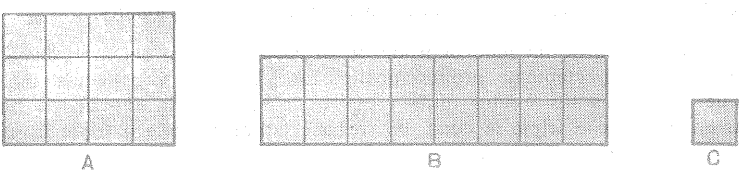


FIG. 16

Pues bien, teniendo esto en cuenta, decimos que la razón de las cantidades A y B, es el cociente de los números 12 y 16 que resultan de medirlas con la misma unidad C.

En efecto: siendo

$$C = \frac{1}{16} \text{ de } B \quad \text{y} \quad A = 12\,C, \quad \text{será} \quad A = 12 \times \frac{1}{16} B = \frac{12}{16} B$$

de donde,

$$\frac{A}{B} = \frac{12}{16}$$

Razonando con cualquier otro par de cantidades, llegaríamos a la misma conclusión. De ahí, que podamos enunciar la siguiente

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — *La razón de dos cantidades homogéneas equivale al cociente de los números que resultan al medirlas con la misma unidad.*

137. Magnitudes directamente proporcionales. — I. *Dos magnitudes que dependen una de otra se dice que son directamente proporcionales, si al multiplicar una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente en la otra queda multiplicada por ese mismo número.*

Veamos si son directamente proporcionales los siguientes pares de magnitudes:

1.º El *coste* de una mercancía y el *peso* de la misma. Podemos decir: a doble (triple, etc.) peso, corresponde doble (triple, etc.) coste; luego, dichas magnitudes son directamente proporcionales.

2.º El *precio* de un viaje y los *kilómetros* recorridos. A doble número de kilómetros, corresponderá doble precio, por lo que estas magnitudes son directamente proporcionales.

3.º El *peso* de los cuerpos y el *volumen* que ocupan. A doble volumen corresponde doble peso, siendo, por tanto, directamente proporcionales.

4.º La *estatura* de un niño depende de su *edad*, pero sin embargo dichas magnitudes no son directamente proporcionales. En efecto: si suponemos, por ejemplo, que un niño a los 9 años mide 1 metro de estatura, la experiencia nos dice que al hacer doble o triple la edad, no se hace también doble o triple la estatura.

II. *En dos magnitudes directamente proporcionales, la razón de dos cantidades cualesquiera de la primera, es igual a la razón de las cantidades correspondientes en la segunda.*

EJEMPLO. — Si suponemos que un kilogramo de arroz cuesta 9'50 ptas., podremos establecer la siguiente correspondencia entre los valores de las magnitudes *peso* del arroz y *coste* del mismo:

1 Kg.	2 Kg.	3 Kg.	4 Kg.	5 Kg.	...
9'50 ptas.	19 ptas.	28'50 ptas.	38 ptas.	47'50 ptas.	...

en la que se verifica efectivamente la propiedad enunciada, ya que tenemos:

$$\frac{1}{3} = \frac{9'50}{28'50}; \qquad \frac{3}{5} = \frac{28'50}{47'50}; \qquad \frac{2}{5} = \frac{19}{47'50}; \qquad \ldots$$

En general, si la magnitud A es directamente proporcional a la magnitud B, y a, a', a'', a''', ..., son valores particulares o cantidades de la primera, y b, b', b'', b''', ..., los correspondientes de la segunda, tendremos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \qquad \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''}; \qquad \frac{a}{a'''} = \frac{b}{b'''}; \qquad \ldots \qquad [1]$$

III. *En las magnitudes directamente proporcionales se verifica que la razón de dos valores correspondientes cualesquiera, es constante.*

En efecto: permutando los medios en las proporciones anteriores [1], resulta:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'''}{b'''}; \qquad \ldots$$

de donde,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots$$

Por tanto, la razón $\frac{\textit{cualquier valor de A}}{\textit{su correspondiente de B}}$ es siempre la misma.

138. Magnitudes inversamente proporcionales — I. *Dos magnitudes que dependen una de otra se dice que son inversamente proporcionales, si al multiplicar o dividir, una cantidad de una de las magnitudes por un número, la correspondiente en la otra queda dividida o multiplicada, respectivamente, por ese mismo número.*

EJEMPLO. — Supongamos que un tren ha empleado 6 horas en recorrer la distancia entre dos poblaciones, llevando velocidad uniforme de 40 Km. por hora.

Si la velocidad aumenta, el tiempo que tarde será menor. Por ejemplo, si la velocidad fuera de 80 Km. por hora ($80 = 40 \times 2$), el tiempo invertido serían 3 horas ($3 = 6 : 2$). Por el contrario, marchando a la velocidad de 20 Km. por hora ($20 = 40 : 2$), el tiempo empleado serían 12 horas ($12 = 6 \times 2$).

Vemos, por consiguiente, que al multiplicar o dividir la velocidad por un número, el tiempo queda, respectivamente, dividido o multiplicado por el mismo número.

Según la definición, diremos, pues, que *el tiempo invertido por un móvil en recorrer una distancia, es inversamente proporcional a la velocidad que lleva.*

II. *En dos magnitudes inversamente proporcionales, la razón de dos cantidades cualesquiera de la primera, es igual a la razón inversa de las cantidades correspondientes de la segunda.*

EJEMPLO. — Si 12 hombres efectúan un determinado trabajo en 8 horas, 6 hombres harían el mismo trabajo en 16 horas, 4 hombres en 24 horas, 3 hombres en 32 horas, etc. Se tiene, por tanto, la siguiente correspondencia entre los valores de las dos magnitudes: *número de hombres* y *tiempo empleado:*

12 hombres	6 hombres	4 hombres	3 hombres	...
8 horas	16 horas	24 horas	32 horas	...

verificándose, en efecto, que

$$\frac{12}{6} = \frac{16}{8}; \qquad \frac{6}{4} = \frac{24}{16}; \qquad \frac{4}{3} = \frac{32}{24}; \qquad \ldots$$

En general, si la magnitud A es inversamente proporcional a la magnitud B, y a, a', a'', a''', ..., son valores particulares de la primera, y b, b', b'', b''', ..., los correspondientes de la segunda, tendremos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}; \qquad \frac{a}{a''} = \frac{b''}{b}; \qquad \frac{a}{a'''} = \frac{b'''}{b}; \qquad \ldots \qquad [21]$$

III. *En las magnitudes inversamente proporcionales se verifica que el producto de dos valores correspondientes cualesquiera, es constante.*

En efecto: igualando los productos de los extremos y de los medios en las proporciones anteriores [2], resulta:

$$a \cdot b = a' \cdot b'; \qquad a \cdot b = a'' \cdot b''; \qquad a \cdot b = a''' \cdot b'''; \qquad \ldots$$

de donde,

$$a \cdot b = a' \cdot b' = a'' \cdot b'' = a''' \cdot b''' = \ldots$$

Por tanto, el producto *cualquier valor de* A × *su correspondiente de* B, es siempre el mismo.

139. Regla de tres simple directa. Porcentajes. — Se llama *regla de tres simple directa,* el procedimiento por el cual se resuelven los problemas en que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales.

Decimos regla de tres, porque en tales problemas se dan tres cantidades, de las cuales dos son correspondientes, una de cada magnitud, y se trata de hallar la cantidad correspondiente a la tercera.

Un caso particular de la regla de tres simple directa, son los problemas de *porcentaje.* En ellos, una de las cantidades conocidas es 100, denominándose *tanto por ciento* la cantidad correspondiente en la otra magnitud.

El tanto por ciento se indica, escribiendo a continuación del número que lo representa el signo %. Así, 3 %, 79 %, se leen 3 por ciento, 79 por ciento.

Ordinariamente, los comerciantes e industriales pagan a los encargados de la venta de sus artículos, no una cantidad fija, sino una cantidad

proporcional al importe de la venta, fijándose entonces el tanto por ciento que han de percibir. En estos casos, el tanto por ciento se llama también *comisión*, y los problemas a que dan lugar se denominan problemas de comisión o corretaje.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PORCENTAJE. — Veamos algunos ejemplos de estos problemas:

PROBLEMA 1.° — *Una persona se ha encargado de la venta de una finca, valorada en* 128.000 *ptas. ¿Qué cantidad recibirá por dicha gestión, si se convino en abonarle el* 2 % *del valor de la finca?*

Plantearemos la siguiente regla de tres:

Si por 100 pesetas de venta recibe 2
por 128.000 » » recibirá x

de donde se obtiene la proporción

$$\frac{100}{128.000} = \frac{2}{x} \quad \text{y, de aquí,} \quad x = \frac{128.000 \times 2}{100} = 2.560$$

Resultado: Recibirá 2.560 pesetas.

PROBLEMA 2.° *En un colegio fueron suspendidos el* 12 % *de los alumnos de un curso. Si el número de aprobados fue de* 110, *dígase de cuántos alumnos se componía el referido curso.*

Teniendo en cuenta que de cada 100 alumnos aprobaron $100 - 12 = 88$, el problema se reduce a hallar un número cuyo 88 % es 110. Tenemos:

De 100 alumnos aprobaron 88
y de x » » 110

de donde se deduce la proporción

$$\frac{100}{x} = \frac{88}{110} \quad \text{en la que} \quad x = \frac{110 \times 100}{88} = 125$$

Resultado: El curso en cuestión se componía de 125 alumnos.

PROBLEMA 3.° — *Por el transporte de una mercancía se pagó el* 1'75 % *de su valor. Averiguar cuál fue éste, sabiendo que, en total, la factura importó* 766.177'50 *pesetas.*

Razonemos del siguiente modo:

101'75 pesetas equivalen a 100, sin pagar transporte
y 766.177'50 » » x » » »

de donde,

$$x = \frac{766.177'50 \times 100}{101'75} = 753.000$$

Resultado: El valor de la mercancía fue de 753.000 ptas.

140. Regla de tres simple inversa. — *Regla de tres simple inversa*, es el procedimiento por el cual se resuelven los problemas en que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales.

Problema. — *Si 7 hombres tardan 84 días en hacer una obra, ¿cuánto tardarían 12 hombres?*

Planteo: 7 h. ..... 84 d.
12 h. ..... x d.

Proporción: $\frac{84}{x} = \frac{12}{7}$.

Solución: $x = \frac{84 \times 7}{12} = 49$ **días.**

Decimos: *Doble número* de hombres tardarán la *mitad del tiempo* o sencillamente, *más* hombres tardan *menos*. Es inversa y formamos las razones:

Razón de los segundos términos: $\frac{84}{x}$. Proporción: $\frac{84}{x} = \frac{12}{7}$.

Razón inversa de los primeros: $\frac{12}{7}$. Incógnita: $x = \frac{84 \times 7}{12} = 49$ **días.**

141. Observación. — En los problemas de regla de tres, los valores de cada magnitud han de ir referidos a la misma unidad.

Asimismo, cuando uno o más datos están expresados en forma de número complejo, será preciso convertirlos en incomplejos antes de formar la proporción.

EJERCICIOS

442. En una clase de 30 alumnos, hay 27 presentes y 3 ausentes. ¿Cuál es la razón de los alumnos presentes a los ausentes?

443. ¿Cuál es la razón de 45 minutos a un día de 24 horas?

444. ¿Cuál es la razón entre dos segmentos cuyas longitudes respectivas son 18'50 cm. y 23'75 cm.?

Dígase si los siguientes pares de magnitudes son directa o inversamente proporcionales:

445. 1. El peso de una mercancía y su valor o coste.
2. El espacio recorrido y el tiempo empleado, en el movimiento uniforme.
3. El tiempo empleado y el número de obreros necesarios para realizar un trabajo.
4. La cantidad de agua que arroja un grifo y el tiempo necesario para llenar un depósito.
5. El número de los que participan en un reparto y la cantidad que corresponde a cada uno, cuando se distribuye una cantidad fija.

446. 1. El número de personas y la cantidad de alimentos que se necesita.
2. El número de personas y los días que dura una determinada cantidad de provisiones.
3. La gasolina consumida por un automóvil y los kilómetros recorridos.
4. El peso del azúcar extraído y el peso de la remolacha de que se extrae.
5. El número de botellas que pueden llenarse con el contenido de un recipiente y la capacidad de una botella.

447. Si por los jornales de una semana (7 días) he recibido 439'25 ptas., ¿cuánto cobraré por los de un mes de 30 días?

448. Una rueda da 3.871 vueltas en 9 minutos y 13 segundos. ¿Cuántas vueltas dará en 3 horas y media?

449. Al pesar 45 litros de aceite, hemos obtenido 41'22 Kg. ¿Cuántos litros habrá en 10 quintales métricos?

450. Se han pagado 15.485 ptas. por 19 toneladas de remolacha. ¿Cuánto costarán 123 toneladas?

451. Para pavimentar 21 metros de una acera se han empleado 112 losetas. ¿Cuántas serán necesarias para pavimentar toda la acera, que tiene 342 metros de larga?

452. Un grifo, de gasto constante, arroja 750 litros de agua en 11 minutos. Se pregunta el tiempo que tardará en llenar un depósito de 8'25 m^3.

453. Para embrear un tramo de carretera en 36 días, un contratista ha calculado que necesita 52 hombres. ¿Cuántos precisará si se ve obligado a realizar el mismo trabajo en 27 días?

454. Las ruedas delanteras de un coche tienen 2'1 m. de diámetro, y las traseras 3'75 m. ¿Cuántas vueltas habrán dado las primeras cuando las segundas den 4.200?

455. Con cierta cantidad de dinero, una persona compró 88 Kg. de azúcar a 10'75 pesetas el kilo. ¿Cuántos kilogramos hubiera comprado con la misma cantidad, de haber sido 11'10 ptas. el precio del azúcar?

456. Al embotellar el vino de un tonel, se llenaron 720 botellas de 0'65 litros. Si las botellas hubieran sido de 0'75 litros, ¿cuántas se habrían necesitado?

457. Se le confió a un albañil un trabajo que debía estar terminado en 24 días. No pudiendo éste acabarlo en el plazo fijado, pidió la colaboración de un compañero en los 6 últimos días. Si la cantidad estipulada por el trabajo fue de 2.514 pesetas, ¿cuánto deberá entregar al compañero? Se supone que los dos ganan igual jornal.

458. Una persona, trabajando 9 horas diarias, realizó un trabajo en 22 días. ¿Cuántos días hubiera empleado si hubiera dedicado a dicho trabajo 2 horas más cada día?

459. Un panadero compró 1.640 kilos de harina y luego otros 350 kilos, siendo 9.030 ptas. la diferencia entre las correspondientes facturas. Averiguar el coste de 87 kilogramos de la misma harina.

460. ¿Cuánto ganó un librero que hizo una venta por 38.400 ptas., si la comisión que recibe del editor es del 12'50 %?

461. El prensado de 1.500 kilogramos de semilla de lino produjo el 32 % de su peso en aceite. ¿Qué peso de aceite se obtuvo?

462. Compré una mercancía por 3.400 ptas. y pagué de portes 120 ptas. ¿Por cuánto he de venderla si deseo obtener el 12 % de beneficio?

463. ¿Qué tanto por ciento de rebaja se hizo en el importe de una factura de 2.850 pesetas, si lo que hubo que pagar fueron 2.679 ptas.?

464. De los 960 alumnos matriculados en un colegio, aprobaron el curso 816. ¿Cuál es el tanto por ciento de los alumnos aprobados?

465. Una persona compró una finca por 78.120 ptas. que luego se vio precisada a vender por 69.136'20 ptas. ¿Qué tanto por ciento de pérdida experimentó?

466. Un señor vendió un automóvil usado por 83.000 ptas. Se desea saber cuánto le costó a él, si en razón del uso rebajó el 21 % sobre el valor de compra.

467. Por haberse declarado en quiebra un industrial, los acreedores podrán cobrar solamente el 19 % de sus créditos. Averiguar la cantidad perdida por un acreedor que ha recibido 8.550 ptas.

468. Un tabernero compra vino a 2'25 ptas. litro y luego lo vende a 3'10 pesetas. ¿Qué tanto por ciento de ganancia le queda?

469. Un empleado de una fábrica percibe un sueldo anual de 34.200 ptas., más el 8'5 % de los beneficios conseguidos por la casa. Si el total de ventas en un año ha sido de 12,540.000 ptas. y el 15 % de las mismas representa ganancia, ¿cuánto ganó ese año el empleado?

470. Un corredor de fincas vendió una casa por 220.000 ptas. Si el vendedor le ofreció el 2 % de comisión, y el comprador el 3 %, ¿cuánto cobrará?

471. Un comerciante que compró 180 metros de tela por 2.160 ptas., ha vendido las dos terceras partes a 15 ptas. metro. ¿A qué precio deberá vender el resto, si quiere obtener una ganancia total igual al 30 % sobre el valor de compra?

17. Regla de tres compuesta. - Interés simple

142. Proporcionalidad compuesta. — Hasta ahora hemos considerado el caso de una magnitud que dependía de otra solamente. En la práctica, sin embargo, lo más frecuente es que una magnitud dependa no de otra sola, sino de dos o más. Tenemos entonces la llamada *proporcionalidad compuesta.*

EJEMPLO. — El número de libros que podemos comprar es una magnitud que depende del dinero que se quiere invertir en la compra y del precio de cada libro. Veamos cómo es la proporcionalidad existente entre el número de libros y las otras dos magnitudes. Para ello, supongamos:

1.º Que es fijo el precio de cada libro y variable la cantidad que vamos a invertir. Razonaremos así:

A 45 ptas. el libro, con 270 ptas. podemos comprar 6 libros
a 45 ptas. el libro, con 540 ptas. podemos comprar 12 libros

De aquí se deduce, que el número de libros que podemos comprar y su valor, o coste, son magnitudes directamente proporcionales.

2.º Que es constante la cantidad que queremos invertir y variable el precio de cada ejemplar. Tendremos:

A 45 ptas. el libro, con 270 ptas. podemos comprar 6 libros
a 90 ptas. el libro, con 270 ptas. podemos comprar 3 libros

Luego, el número de libros que podemos comprar y el precio de cada uno son magnitudes inversamente proporcionales.

En resumen: *el número de libros que podemos comprar es directamente proporcional a la cantidad que en ello invirtamos, e inversamente proporcional al precio de cada libro.*

Por razonamientos semejantes deduciríamos asimismo que el área de un rectángulo es directamente proporcional a su base y también directamente proporcional a su altura; las velocidades, en el movimiento uniforme, son directamente proporcionales a los espacios recorridos e inversamente a los tiempos; el tiempo empleado en recorrer una distancia, es

directamente proporcional a la distancia e inversamente a la velocidad del móvil; el dinero invertido en pagar el trabajo realizado por varios obreros, es directamente proporcional al número de obreros y al jornal que cobra cada uno; el número de días empleados en realizar un trabajo, es directamente proporcional a las dificultades o magnitud del trabajo, e inversamente proporcional al número de obreros y al número de horas que se trabaja diariamente; etc., etc.

A todos estos ejemplos y a cuantos pudiéramos poner, les es aplicable la siguiente

DEFINICIÓN. — *Una magnitud* M *que depende de otras varias,* A, B, C, *decimos que es proporcional a éstas (directa o inversamente), cuando es proporcional a cada una de ellas al suponer fijas las restantes.*

143. Regla de tres compuesta. — *Regla de tres compuesta* es el procedimiento que permite resolver los problemas en que interviene una magnitud que es directa o inversamente proporcional a otras varias.

Este procedimiento se llama así, porque equivale a plantear dos o más reglas de tres simples.

PROBLEMA. — *En una colonia escolar se gastaron* 67.500 *ptas. para alimentar a* 125 *niños durante* 30 *días. ¿Cuántos niños se podrían alimentar durante* 20 *días con* 90.000 *ptas.?*

MÉTODO DE PROPORCIONES. — Las magnitudes y sus correspondientes valores son:

	GASTO	TIEMPO	NIÑOS
Valores primitivos	67.500 ptas.	30 días	125 niños
Valores nuevos	90.000 »	20 »	x »

Comparando la magnitud en la que aparece la incógnita con cada una de las restantes, se observa que el número de niños es directamente proporcional al gasto e inversamente proporcional al tiempo.

Para resolver el problema haremos variar sucesivamente cada una de las dos magnitudes de que depende el número de niños, permaneciendo constante la otra. Designemos por x la incógnita o valor que buscamos y por x' una incógnita auxiliar.

1.º Hagamos variar el *gasto*. Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} 67.500 \text{ ptas.} \\ \downarrow \\ 90.000 \quad » \end{array} \quad \begin{array}{l} 125 \text{ niños} \\ \downarrow \\ x' \quad » \end{array}\right\} \quad \frac{67.500}{90.000} = \frac{125}{x'}$$

2.º Hagamos ahora variar el *tiempo*. Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} 30 \text{ días} \quad x' \text{ niños} \\ \uparrow \qquad\quad \downarrow \\ 20 \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \end{array}\right\} \quad \frac{20}{30} = \frac{x'}{x}$$

Multiplicando miembro a miembro las dos proporciones obtenidas, resulta

$$\frac{67.500 \times 20}{90.000 \times 30} = \frac{125 \times x'}{x' \times x} \quad \text{y simplificando,} \quad \frac{67.500 \times 20}{90.000 \times 30} = \frac{125}{x} \qquad [1]$$

de donde,

$$x = \frac{125 \times 90.000 \times 30}{67.500 \times 20} = 125 \times \frac{90.000}{67.500} \times \frac{30}{20} = 250 \text{ niños}$$

Observando este resultado, vemos que se obtiene al operar como indica la siguiente regla:

Para hallar el valor de la incógnita en una regla de tres compuesta, se multiplica el valor conocido de su misma especie por las razones de los nuevos valores a los primitivos en las magnitudes que le son directamente proporcionales, y por las razones inversas de los nuevos valores a los primitivos, en las magnitudes inversamente proporcionales.

En la práctica, dispondremos así los cálculos (las flechas indican cómo se forman las razones):

	dir.	inv.	
Valores primitivos	67.500 ptas.	30 días	125 niños
	↑	↓	
Valores nuevos	90.000 »	20 »	x »

$$x = 125 \times \frac{90.000}{67.500} \times \frac{30}{20} = \frac{125 \times 90.000 \times 30}{67.500 \times 20} = 250$$

144. INTERÉS SIMPLE. DEFINICIONES. — Uno de los usos que el propietario puede hacer de su dinero, es prestarlo a otra persona o colocarlo en un Banco; entonces, la persona que necesitaba dinero y lo tomó prestado, o el Banco en donde se depositó, se comprometen a pagar una especie de alquiler del dinero, llamado *interés*.

La cantidad prestada o colocada recibe el nombre de *capital*.

Rédito, tasa o *tanto por ciento* es el interés fijado por cada 100 pesetas en un año. *Renta* es el interés que produce un capital en un año.

En el interés simple, que es el que estudiaremos, se supone que el capital no se modifica durante todo el tiempo en que está colocado.

145. Convenio fundamental. — El decir que en el interés simple cada 100 pesetas producen una cierta cantidad por año, llamada rédito, equivale a admitir que *el interés simple es directamente proporcional al capital prestado y al tiempo que dura el préstamo.*

Con el fin de facilitar el cálculo, se considera en general el año de 360 días, dividido en 12 meses iguales, de 30 días cada uno. No obstante, cuando hayan de contarse los días comprendidos entre dos fechas determinadas, se dará al año y a los meses su duración real.

146. Deducción de fórmulas. — Los problemas de interés se resuelven por regla de tres. Cualquiera de las cantidades que intervienen: interés, capital, rédito y tiempo, puede ser la incógnita. Según esto, pueden presentarse cuatro clases de problemas.

PROBLEMA 1.° — *¿Qué interés producirán* 6.240 *pesetas, prestadas al* 3 *por* 100 *durante* 4 *años?*

Plantearemos así el problema:

100 pesetas en 1 año producen 3
6.240 » » 4 años producirán x

de donde (núm. 143),

$$x = 3 \times \frac{4}{1} \times \frac{6.240}{100} = \frac{6.240 \times 3 \times 4}{100} = 748'80$$

REGLA. — Para calcular el interés producido por c pesetas, prestadas durante t años al r por ciento anual, se halla el producto del capital por el tanto por ciento y el tiempo, y se divide por 100.

La regla anterior viene expresada por la fórmula:

$$\boxed{i = \frac{crt}{100}}$$

FÓRMULAS DERIVADAS. — De la fórmula del interés,

$$i = \frac{crt}{100} \quad \text{se deduce} \quad 100\,i = crt$$

y dividiendo a los dos miembros de esta igualdad, sucesivamente, por rt, ct y cr, obtenemos:

$$c = \frac{100\,i}{rt}; \qquad r = \frac{100\,i}{ct}; \qquad t = \frac{100\,i}{cr};$$

fórmulas que nos permiten averiguar el capital prestado, el rédito y el tiempo, respectivamente.

Si en el razonamiento seguido para la deducción de la fórmula del interés, hubiéramos supuesto que el tiempo iba expresado en meses, las fórmulas halladas se hubieran convertido en las siguientes:

$$i = \frac{crt}{1.200}; \quad c = \frac{1.200\,i}{rt}; \quad r = \frac{1.200\,i}{ct}; \quad t = \frac{1.200\,i}{cr};$$

y si suponemos que t está expresado en días, tendríamos:

$$= \frac{crt}{36.000}; \quad c = \frac{36.000\,i}{rt}; \quad r = \frac{36.000\,i}{ct}; \quad t = \frac{36.000\,i}{cr}$$

Veamos la aplicación de estas fórmulas en algunos ejemplos.

PROBLEMA 2.º — *¿Cuál es el capital que colocado al 5 % produce 7.350 ptas. en 3 años?*

Haciendo $r = 5$, $i = 7.350$ y $t = 3$ en la fórmula del capital, cuando el tiempo está expresado en años, resulta:

$$c = \frac{100\,i}{rt} = \frac{100 \times 7.350}{5 \times 3} = 49.000$$

Es decir, que el capital pedido son 49.000 ptas.

PROBLEMA 3.º — *¿A qué tanto por ciento estuvieron colocadas 72.600 ptas., si en 7 meses produjeron 1.482'25 ptas. a interés simple?*

Tomaremos $c = 72.600$, $t = 7$ e $i = 1.482'25$ en la fórmula del rédito, cuando el tiempo está expresado en meses, con lo que resulta:

$$r = \frac{1.200\,i}{ct} = \frac{1.200 \times 1.482'25}{72.600 \times 7} = 3'5$$

Luego, el capital en cuestión fue colocado al 3'5 %.

PROBLEMA 4.º — *¿Cuántos días habrán de transcurrir para que* 127.800 *ptas. colocadas al* 4 *por ciento produzcan* 852 *ptas. de interés?*

Haciendo $c = 127.800$, $r = 4$ e $i = 852$ en la fórmula del tiempo, cuando t va expresado en días, resulta:

$$t = \frac{36.000\, i}{c\, r} = \frac{36.000 \times 852}{127.800 \times 4} = 60$$

Luego, han de transcurrir 60 días.

147. DESCUENTO COMERCIAL. — En el comercio, cuando se efectúa una compra, no siempre se paga al contado. Lo que se hace, en ocasiones, es firmar un documento por el cual se compromete el comprador a abonar el importe de la mercancía dentro de un plazo que se ha fijado previamente entre el deudor y el acreedor. Dicho documento se llama *pagaré*, si lo extiende el comprador, y *letra de cambio*, si lo extiende el vendedor.

PAGARÉ *es un documento de carácter oficial por el cual una persona (deudor) promete a otra (acreedor) el pago de cierta cantidad, en una fecha determinada.*

LETRA DE CAMBIO *es un documento de carácter oficial por el cual una persona (acreedor) ordena a otra (deudor) el pago de cierta cantidad, en una fecha determinada.*

Por consiguiente, tanto en el pagaré como en la letra de cambio debe hacerse constar: *a)* el importe de la cantidad debida, llamado *valor nominal* del documento, y *b)* cuándo ha de efectuarse el pago, es decir, la llamada *fecha de vencimiento.*

Cuando el poseedor de una letra de cambio o de un pagaré quiere cobrarlos antes de la fecha de su vencimiento, los cede a un Banco, el cual, al pagarlos, *descuenta* una parte proporcional al tiempo que aun falta para la fecha de vencimiento; llegada ésta, es el propio Banco quien se encarga de cobrar del interesado el valor íntegro del nominal.

La cantidad con que se queda el Banco se llama *descuento*, y la que entrega es el *valor efectivo* o *actual* del documento, o sea, que el *descuento es la diferencia entre el valor nominal y el efectivo.*

Hay dos clases de descuento: el *comercial* y el *racional.* Nosotros estudiaremos ahora solamente el descuento comercial.

DESCUENTO COMERCIAL *es el interés que produciría el valor nominal de un documento de crédito (letra o pagaré) durante un tiempo igual al que se ha anticipado el pago, según un tanto por ciento convenido.*

De lo dicho se deduce que los problemas sobre descuento son análogos a los de interés, y sirven las mismas fórmulas del párrafo 146, con sólo sustituir *c*, capital, por *N*, valor nominal, y poner *d*, descuento, en vez de *i*, interés. El tiempo va expresado generalmente en días. Así que, tendremos:

$$d = \frac{N\,r\,t}{36.000}; \qquad N = \frac{36.000\,d}{r\,t}; \qquad r = \frac{36.000\,d}{N\,t}; \qquad t = \frac{36.000\,d}{N\,r}$$

PROBLEMA 1.º — *Calcular el valor efectivo de una letra de cambio de* 47.520 *pesetas que ha sido descontada comercialmente por un Banco, al* 5 *por ciento,* 74 *días antes de su vencimiento.*

Si representamos por *E* el valor efectivo de la letra de cambio, se ha de verificar que $N - d = E$. Hallaremos, por tanto, el descuento *d* y lo restaremos del valor nominal *N*. La primera fórmula nos da

$$d = \frac{N\,r\,t}{36.000} = \frac{47.520 \times 5 \times 74}{36.000} = 488'40$$

y restando de 47.520 el valor hallado, se obtiene:

$$E = N - d = 47.520 - 488'40 = 47.031'60$$

Luego, el valor efectivo de la letra es de 47.031'60 ptas.

PROBLEMA 2.º — *¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada comercialmente al* 7 %, 90 *días antes de su vencimiento, ha disminuído su valor en* 266 *pesetas?*

Haciendo $r = 7$, $t = 90$ y $d = 266$ en la fórmula correspondiente, resulta

$$N = \frac{36.000\,d}{r\,t} = \frac{36.000 \times 266}{7 \times 90} = 15.200$$

Es decir, que el valor nominal de la letra es de 15.200 ptas

EJERCICIOS

472. Tres grifos iguales llenan un depósito de 5 metros cúbicos en 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían en llenar un depósito de 4 metros cúbicos dos grifos iguales a los anteriores?

473. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 28 obreros durante 7 días, si quieren realizar el mismo trabajo que 14 obreros, trabajando 10 horas diarias durante 8 días?

474. Una máquina, trabajando 8 horas diarias, durante 9 días, ha producido 1.500 Kg. de un producto. ¿Cuántos días tienen que trabajar 2 máquinas iguales a la anterior para producir 10 Tm. de ese producto, suponiendo que trabajan 6 horas diarias?

475. Para pagar a 36 obreros que cobran jornal de 77 ptas. se han gastado 16.632 ptas. ¿A cuántos obreros se hubiera podido pagar con 25.920 ptas., abonándoles un jornal de 80 ptas.?

476. Un ganadero dispone de 1.260 Kg. de heno para alimentar a 14 vacas durante 18 días. ¿Cuántos días podría mantener a 24 vacas, disponiendo de 1.320 kilogramos de heno?

477. Por el alumbrado eléctrico de su establecimiento durante 32 días, 4 horas al día, un comerciante pagó 1.664 ptas. Averiguar lo que pagaría por el alumbrado correspondiente a 72 días, encendiendo 3 horas al día y duplicando el número de las lámparas que tenía.

478. Una persona, leyendo durante 4 horas diarias, a razón de 15 páginas por hora, tarda en leer un libro 10 días. ¿Cuántas horas diarias, a razón de 12 páginas por hora, le hubieran bastado para leerlo en 20 días?

479. Para pavimentar una calle de 126 metros de larga por 12 de ancha se han empleado 51.219 losas. ¿Cuántas losas serían necesarias para pavimentar una calle de 184 m. de larga por 15 de ancha?

480. Un destacamento de 300 soldados tiene víveres para 60 días, a razón de 840 gramos por hombre y día. Aumenta la guarnición en 50 hombres y no han de recibir víveres hasta los 90 días. ¿Cuál será la ración de cada soldado para que los víveres sean suficientes?

481. Por su trabajo, cobraron en total dos obreros 2.961 ptas., de las cuales al primero correspondieron 1.512 por 27 jornales, de 8 horas cada uno. Suponiendo que ambos cobran igual por cada hora de trabajo, y sabiendo que el segundo trabajó 9 horas diarias, se pregunta cuántos días trabajó éste.

482. Con el vino contenido en 75 toneles de la misma capacidad, se han llenado 2.585 botellas de 1'35 litros. ¿Cuántas botellas de 0'94 litros se necesitarían para vaciar 64 toneles iguales a los anteriores?

483. Calcular el interés simple de 19.570 ptas. al 4'5 %, en 2 años y 7 meses.

484. Calcular el tanto por ciento a que se prestó un capital de 7.200 ptas., sabiendo que éste en 11 meses produjo 231 pesetas.

485. Se desea saber qué capital, prestado al 5 %, produce una renta diaria de 30 ptas. Tómese el año de 365 días.

486. Calcular el tiempo que deben estar colocadas 2.500 ptas. al 4 %, para que se conviertan en 3.000 ptas. junto con los intereses.

487. Una persona pide prestadas 9.600 ptas. al 4'5 %. Al cabo de 5 meses quiere cancelar la deuda. ¿Cuánto habrá de pagar?

488. ¿Cuánto tiempo habrán de estar colocadas 6.800 ptas. al 4 %, para producir el mismo interés que 58.500 ptas. al 5 % en 20 meses?

489. Averiguar cuánto tiempo estuvo colocado a interés simple, un capital de 17.250 ptas., sabiendo que al 2'5 % produjo 1.725 ptas.

490. Los $\frac{5}{8}$ de un capital colocado al 3'2 % de interés simple, han producido 74'40 ptas en 9 meses. Se desea saber de qué capital se trata.

491. ¿A qué rédito presta su dinero un usurero que pide 5 céntimos diarios por cada 5 pesetas prestadas?

492. ¿Cuánto tiempo se necesita para que un capital cualquiera prestado al 4 %, produzca un interés igual a dicho capital?

493. Los $\frac{2}{5}$ de un capital se han colocado al 5 % de interés simple; $\frac{1}{3}$ del mismo, al 4 %, y el resto, que son 8.730 ptas., al 6 %. Se desea saber cuál es ese capital y qué renta produce.

494. Una persona tomó a préstamo, a interés simple al 4 %, 167.310 ptas. Luego prestó ella la mitad de esa cantidad al 6 %, la tercera parte al 5 %, y el resto al 4'5 %. ¿Qué ganancia obtuvo?

495. Calcular el valor efectivo de una letra de 35.000 ptas., descontada comercialmente al 4'2 por ciento, 45 días antes de su vencimiento.

496. Para pagar una deuda de 17.200 ptas., se ha entregado una letra de 18.000 pesetas, que vence a los 30 días. Si se hace el descuento comercial al 4'5 %, ¿cuánto dinero sobrará?

497. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que, al descontarla comercialmente al 3'5 %, 72 días antes de su vencimiento, ha disminuído su valor en 420 pesetas?

498. Por una letra de 16.000 ptas. nos han pagado 15.880 ptas., descontándola al 6 %. ¿Cuántos días antes de su vencimiento la hemos negociado?

499. Hallar el valor efectivo de una letra de 12.000 ptas. nominales que se paga el 10 de abril, siendo su fecha de vencimiento el 25 de mayo, y que se descuenta al 3'2 %.

500. Por una letra de 2.925 ptas. nominales que vence dentro de 30 días, se han recibido 2.876'25 ptas. ¿A qué tanto por ciento se descontó?

18. Repartos proporcionales. - Mezclas y aleaciones

148. Repartos proporcionales. — *Repartir un número en partes proporcionales a otros varios, es hallar números proporcionales a los dados y cuya suma sea igual al primero.*

Según que la proporcionalidad sea directa o inversa, la operación dará lugar a uno de los dos casos siguientes:

I. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO. — Problema. *Repartir el número* 1.800 *en partes directamente proporcionales a* 2, 5 *y* 9.

Si designamos por x, y, z los números que buscamos, se han de verificar, de acuerdo con la definición, las siguientes igualdades:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} \qquad x + y + z = 1.800$$

Aplicando a la primera de estas igualdades una de las propiedades de las series de razones iguales, tendremos:

$$\frac{x + y + z}{2 + 5 + 9} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}$$

de donde, sustituyendo $x + y + z$ por su igual, resulta

$$\frac{1.800}{16} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}$$

y de aquí, considerando separadamente la primera razón y cada una de las restantes, se obtiene

$$x = \frac{2 \times 1.800}{16} = 225; \qquad y = \frac{5 \times 1.800}{16} = 562'5;$$

$$z = \frac{9 \times 1.800}{16} = 1.012'5$$

En general podemos enunciar la siguiente regla:

Para repartir un número N en partes directamente proporcionales a otros varios a, b, c, se multiplica cada uno de éstos por N, y los productos se dividen por la suma $a + b + c$.

Cuando los números entre los cuales hay que repartir, son fraccionarios, puede aplicarse también esta regla; sin embargo, es más ventajoso reducirlos a un común denominador y luego dividir el número en cuestión en partes proporcionales a los numeradores.

EJEMPLO. — *Repartir el número* 39 *en partes proporcionales a* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$

Como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ son equivalentes a $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$

bastará dividir 39 en partes proporcionales a

$$6,\ 4\ \text{y}\ 3$$

Por tanto,

$$x = \frac{6 \times 39}{13} = 18; \qquad y = \frac{4 \times 39}{13} = 12; \qquad z = \frac{3 \times 39}{13} = 9$$

II. REPARTO PROPORCIONAL INVERSO. — *Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros varios, es repartirlo en partes directamente proporcionales a sus recíprocos.*

PROBLEMA. — *Repartir el número* 4.230 *en partes inversamente proporcionales a* 3, 4 *y* 5.

Como los recíprocos de 3, 4 y 5, son, respectivamente, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$, repartiremos el número 4.230 en partes directamente proporcionales a éstos.

Según la definición, designando por x, y, z las partes que buscamos, tendremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{o bien, reduciendo } \frac{1}{3},\ \frac{1}{4} \text{ y} \\ \frac{1}{5} \text{ a común denominador,} \end{array} \right. \quad \frac{x}{\frac{20}{60}} = \frac{y}{\frac{15}{60}} = \frac{z}{\frac{12}{60}}$$

y multiplicando por 60 los tres denominadores, lo que equivale a dividir por 60 los tres miembros de la igualdad, resulta

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{47} = \frac{4.230}{47}$$

de donde,

$$x = 1.800 \qquad y = 1.350 \qquad z = 1.080$$

COMPROBACIÓN:

$$1.800 + 1.350 + 1.080 = 4.230; \qquad \frac{1.800}{\frac{1}{3}} = \frac{1.350}{\frac{1}{4}} = \frac{1.080}{\frac{1}{5}}$$

149. Regla de compañía. — Los repartos proporcionales o prorrateos tienen numerosas aplicaciones en la vida práctica, siendo una muy importante la del reparto de las ganancias o las pérdidas habidas en los negocios hechos por una sociedad. A esto llamamos *regla de compañía* o *de sociedad.*

Las ganancias o pérdidas de una sociedad cuyos miembros han aportado capitales diversos durante tiempos iguales, deben ser repartidas proporcionalmente a los capitales.

Es decir: capitales iguales tienen derecho a ganancias iguales; y un capital doble, triple, etc., de otro, habrá de recibir ganancia doble, triple, etc. Se basa este convenio en que cada unidad monetaria, la peseta por ejemplo, produce la misma ganancia durante un determinado período de tiempo.

PROBLEMA. — *Tres individuos se asociaron para explotar un negocio. El primero aportó* 14.850 *ptas.; el segundo,* 15.400 *ptas., y el tercero,* 19.750. *Después de algún tiempo deciden repartirse el beneficio conseguido, que fue de* 25.000 *ptas. ¿Cuánto corresponderá a cada uno?*

Bastara repartir las 25.000 ptas. en partes proporcionales a los números 14.850, 15.400 y 19.750. Como 14.850 + 15.400 + 19.750 = 50.000, tendremos:

$$x = \frac{14.850 \times 25.000}{50.000} = 7.425; \qquad y = \frac{15.400 \times 25.000}{50.000} = 7.700$$

$$z = \frac{19.750 \times 25.000}{50.000} = 9.875$$

Luego, al primero corresponden 7.425 ptas.; al segundo, 7.700 ptas., y al tercero, 9.875 ptas.

Aunque en la práctica no suelen darse, podemos suponer, además del considerado, los dos casos siguientes:

1) *Que los socios aporten el mismo capital durante tiempos diferentes.* El reparto de la ganancia o pérdida es entonces proporcional al tiempo en que cada socio tuvo impuesto su capital.

2) *Que los socios aporten capitales distintos durante tiempos difetes.* En este caso, el reparto de la ganancia o pérdida se hace en partes proporcionales a los productos de los capitales por los respectivos tiempos.

Estos dos casos en que los tiempos son diferentes, no suelen presentarse en la práctica, porque cuando un socio se retira de la sociedad o alguien entra a formar parte de ella, se hace liquidación y se procede a constituir una sociedad nueva.

150. MEZCLAS. — *Denominamos mezcla, a la unión, en cantidades diversas, de varias sustancias sin perder sus propiedades físicas.*

En el comercio se mezclan con frecuencia vinos, cafés, legumbres secas, cereales, harinas, etc. Objeto de las mezclas son, principalmente, los dos siguientes: *a)* Corregir las propiedades demasiado acusadas de alguno de los componentes; o *b)* Lograr una mercancía a un precio de mejor venta que alguno de los elementos que la forman.

Los problemas de mezclas pueden reducirse a estos dos:

1.° PROBLEMA DIRECTO. — *Conocidas las cantidades y los precios de los componentes que se mezclan, hallar el precio de la mezcla.*

2.° PROBLEMA INVERSO. — *Conocidos los precios de los componentes, hallar las cantidades que se han de mezclar de ellos para que el precio de la mezcla sea uno prefijado.*

151. Problema directo: CÁLCULO DEL PRECIO DE LA MEZCLA. — Sean c, c', c'',... las cantidades mezcladas, y p, p', p'',... los precios respectivos de los componentes. Llamemos p_m al precio medio de la mezcla que queremos determinar.

El coste de los componentes será $cp + c'p' + c''p'' + \ldots$
y el de la mezcla ..... $(c+c'+c''+\ldots)p_m$

Como ambos costes han de ser iguales, podemos escribir:

$$cp + c'p' + c''p'' + \ldots = (c+c'+c'' +\ldots)p_m$$

de donde, al dividir a los dos miembros por $c + c' + c'' + \ldots$, se obtiene

$$p_m = \frac{cp + c'p' + c''p'' + \ldots}{c + c' + c'' + \ldots}$$

De acuerdo con este resultado, enunciaremos la siguiente regla:

Para hallar el precio medio de una mezcla, se multiplican las cantidades mezcladas por sus precios respectivos, y se divide la suma de los productos obtenidos por la de las cantidades mezcladas.

EJEMPLO. — *Se han mezclado* 52 *litros de vino de* 4'25 *ptas. el litro, con* 66 *litros de* 3'50 *ptas. y* 82 *de* 7 *ptas. ¿Cuál es el precio de la mezcla?*

$$\begin{array}{lll} cp = 52 \times 4'25 = & 221 & c = 52 \\ c'p' = 66 \times 3'50 = & 231 & c' = 66 \\ c''p'' = 82 \times 7 = & 574 & c'' = 82 \\ & 1.026 & 200 \end{array} \qquad p_m = \frac{1.026}{200} = 5'13 \text{ ptas.}$$

Prácticamente, el litro de la mezcla resulta a 5'15 ptas. litro.

NOTA. — Si uno de los componentes fuera *depreciado*, v. g.: el agua, se le asigna el precio *cero*.

EJEMPLO. — *Se han añadido* 350 *litros de agua a* 14 *hectolitros de vino de* 5 *pesetas el litro. ¿Cuánto valdrá el litro de la mezcla?*

Tendremos:

$$\begin{array}{lll} cp = 1.400 \times 5 = & 7.000 & c = 1.400 \\ c'p' = 350 \times 0 = & 0 & c' = 350 \\ & 7.000 & 1.750 \end{array} \qquad p_m = \frac{7.000}{1.750} = 4 \text{ ptas.}$$

152. **Problema inverso:** I. CÁLCULO DE LA RELACIÓN EN QUE PUEDEN MEZCLARSE LOS COMPONENTES. — Supongamos que se trata solamente de dos componentes, y sean c y c' las cantidades desconocidas que se han de mezclar, p el precio mayor, correspondiente a la primera, p' el precio menor, y p_m el precio medio que se ha fijado para la mezcla. Ha de ser $p > p_m > p'$.

Podemos razonar del siguiente modo:

Al vender c unidades al precio p_m, se pierden ... $c(p-p_m)$ ptas.
Al vender c' unidades al precio p_m, se ganan ..... $c'(p_m-p')$ ptas.

Como no se trata de ganar ni perder, el beneficio ha de ser igual a la pérdida, y, por consiguiente,

$$c(p-p_m) = c'(p_m-p') \quad \text{de donde (120),} \quad \boxed{\frac{c}{c'} = \frac{p_m - p'}{p - p_m}}$$

resultado que expresamos en la siguiente

REGLA. — *Las cantidades a mezclar están en razón inversa con respecto a las diferencias de los precios de cada una y el precio de la mezcla.*

EJEMPLO. — *¿En qué relación habrá que mezclar harina de 650 ptas. el Qm. y de 600 ptas. el Qm. para que el Qm. de la mezcla resulte a 620 ptas.?*

Siendo c la cantidad de harina de a 650 ptas. (p), y c' la correspondiente al precio de 600 ptas. (p'), tendremos, según la fórmula:

$$\frac{c}{c'} = \frac{620 - 600}{650 - 620} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Es decir, que las dos clases de harina se han de mezclar en la proporción de 2 partes (Qm., Kg., ...) de la primera por 3 de la segunda. Así, podemos tomar $c = 2$ Qm. y $c' = 3$ Qm., o estos números multiplicados por otro cualquiera:

$$\frac{c}{c'} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{1}{1'5} = \ldots$$

En la práctica suele adoptarse la siguiente disposición:

Precio superior	650	20 ... 2 Qm. harina de 650 ptas.	
» medio	620		por cada
» inferior	600	30 ... 3 Qm. harina de 600 ptas.	

II. CÁLCULO DE LAS CANTIDADES A MEZCLAR. — 1) *Se conoce la cantidad total.* Si en el ejemplo anterior nos pidieran *las cantidades de las dos clases de harina que es preciso mezclar para obtener* 85 *Qm. de harina de* 620 *ptas.*, hallaremos la solución del problema, repartiendo 85 Qm. en partes proporcionales a 2 y 3.

O sea (núm. 148):

$$\text{Se tomarán} \begin{cases} \dfrac{2 \times 85}{5} = 34 \text{ Qm. de harina de 650 ptas.} \\ \dfrac{3 \times 85}{5} = 51 \text{ Qm. de harina de 600 ptas.} \end{cases}$$

2) *Se conoce una de las cantidades.* Supongamos ahora que en el repetido ejemplo anterior se nos pregunta *qué cantidad de harina de* 600 *ptas. es necesario mezclar con* 54 *Qm. de la de* 650 *ptas.*

La solución será el valor que corresponde a x en la proporción

$$\frac{54}{x} = \frac{2}{3} \quad \text{o sea} \quad x = \frac{54 \times 3}{2} = 81 \text{ Qm.}$$

153. ALEACIONES. — *Aleación es el cuerpo obtenido al fundir juntos dos o más metales.*

Con las aleaciones se consigue modificar las propiedades de los componentes, v. g.: la dureza. Así, tanto la plata como el oro resultarían demasiado blandos para emplearlos puros en la fabricación de monedas o alhajas; por eso, se les funde con cobre, resultando una aleación de dureza suficiente.

Llamamos *lingote* a un trozo de metal o de aleación.

El metal precioso (oro, plata, platino) que entra en algunas aleaciones, se llama *metal fino.*

LEY de una aleación es el peso de metal fino que entra por cada unidad de peso de la aleación.

La ley suele expresarse en milésimas de la unidad. Así, cuando decimos que la ley de cierta clase de monedas de plata es de 0'835, queremos indicar que en cada gramo de aleación hay 835 mg. de plata y los 165 restantes son de cobre.

Los problemas sobre aleaciones se resuelven de modo análogo a los de mezclas, sin más que sustituir el precio por la ley.

EJEMPLO DE PROBLEMA DIRECTO. — *Se han fundido juntos tres lingotes de plata: el primero de 6'24 kilogramos y ley 0'950; el segundo de 10'5 kilogramos y ley 0'740, y el tercero de 8'45 kilogramos y ley 0'900. ¿Cuál será la ley de la aleación?*

Tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 6'24 \text{ Kg.} \times 0'950 & = & 5'928 \text{ Kg. de plata pura} \\ 10'5 \text{ Kg.} \times 0'740 & = & 7'770 \text{ Kg. » » »} \\ 8'45 \text{ Kg.} \times 0'900 & = & 7'605 \text{ Kg. » » »} \\ \hline 25'19 \text{ Kg. contienen} & & 21'303 \text{ Kg. » » »} \end{array}$$

Luego, la ley será

$$21'303 : 25'19 = 0'845$$

EJEMPLO DE PROBLEMA INVERSO. — *Se tienen dos lingotes de oro, uno de ley 0'940 y otro de ley 0'870. ¿Cuántos gramos es necesario tomar de cada uno para obtener 700 gramos de aleación de ley 0'900?*

Dispondremos así los cálculos:

$$\begin{array}{ccccc} 0'940 & & 0'030 & \ldots\ldots\ldots\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots & x \text{ gramos} \\ & 0'900 & & & \\ 0'870 & & 0'040 & \ldots\ldots\ldots\ 4 \ldots\ldots\ldots\ldots & y \quad » \\ & & & \overline{\quad 7 \quad} & \overline{700 \quad »} \end{array}$$

Bastará ahora repartir 700 en partes proporcionales a 3 y 4. Es decir:

$$x = \frac{3 \times 700}{7} = 300 \text{ g. de ley } 0'940; \qquad y = \frac{4 \times 700}{7} = 400 \text{ g. de ley } 0'870$$

NOTA. — En los problemas pueden figurar como datos el metal fino y el auxiliar, considerándolos en tales casos como lingotes cuyas leyes respectivas son 1 y 0.

154. Expresión de la ley en quilates. — La ley de las aleaciones en las que entra el oro, es frecuente también expresarla en *quilates.*

Quilate es la relación entre una parte de metal fino (oro) por cada 24 partes de aleación. Concretamente: cuando el peso de la aleación se da en gramos, quilate es un gramo de oro en 24 gramos de aleación.

Diremos, por ejemplo, que una alhaja es de oro de 16 quilates, cuando en 24 gramos de aleación hay 16 de oro, o sea, cuando los $\frac{16}{24}$ del peso de la alhaja son oro.

EJERCICIOS

501. Dividir el número 22.103 en partes proporcionales a 5, 9 y 17.

502. Dividir el número 12.632 en partes proporcionales a los cuadrados de los números 2, 7 y 11.

503. Dividir el número 3.705 en partes proporcionales a los cubos de los números 1, 2 y 3.

504. Repartir el número 1.026 en partes proporcionales a las raíces cuadradas de los números 196, 256 y 576.

505. El dueño de una fábrica desea repartir una parte de sus ganancias, que asciende a 81.140 ptas., entre tres empleados, proporcionalmente a los años de servicio. Si estos son 3, 7 y 10, respectivamente, averiguar lo que corresponde a cada uno.

506. Tres obreros que ganan igual jornal, cobraron en conjunto 1.776 pesetas por un trabajo que realizaron en colaboración. El primero trabajó 5 días, el segundo 8, y el tercero 11. ¿Cuánto cobró cada uno?

507. El alquiler de un coche, en el que cuatro familias amigas realizaron una excursión, costó 4.480 ptas. ¿Cuánto pagará cada familia, si constan, respectivamente, de 4, 7, 9 y 12 individuos, y el pago quiere hacerse proporcionalmente al número de personas que las componen?

508. Una cierta cantidad se repartió proporcionalmente a los números 11, 8 y 14. La parte correspondiente al primero es 1.353. Hállese la parte que corresponde a los otros dos y la cantidad repartida.

509. Sabiendo que 1 gramo de hidrógeno se combina con 8 de oxígeno para formar 9 gramos de agua pura, se desea saber el peso de hidrógeno y el de oxígeno que entra en la composición de 18 litros de agua.

510. Un depósito se llenó con tres grifos. Si el número de litros que vierte cada uno, en el mismo tiempo, es proporcional a los números 6, 11 y 13, y se sabe que el primer grifo arrojó 438 litros, ¿cuál será la capacidad del depósito?

511. Distribuir 3.100 ptas. entre tres personas, de modo que la primera tenga el doble que la segunda, y ésta el triple que la tercera.

512. Distribuir 4.230 ptas. entre dos personas, de manera que una tenga los $\frac{7}{8}$ de la otra.

513. Una persona deja al morir la cantidad de 98.745 ptas. para que sea repartida entre tres sobrinos, de modo que las partes respectivas sean inversamente proporcionales a sus edades, que son 13, 9 y 5 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

514. En una competición ciclista se reparten 16.650 ptas. entre los tres primeros clasificados. Las cantidades que corresponden a cada uno son inversamente proporcionales a los tiempos empleados. Sabiendo que el primero invirtió 12 minutos, el segundo 15 y el tercero 18, dígase cuánto recibirá cada uno.

515. Se han pagado 150.000 ptas. por dos motores de 4 y 6 caballos, respectivamente. El primero lleva 2.400 horas de trabajo y el segundo 5.400. ¿Cuánto costó cada uno, si se pagaron proporcionalmente al número de caballos y en proporción inversa al de horas trabajadas?

516. Se va a construir un puente entre los pueblos *A* y *B*, que vale 2.000.000 de pesetas, correspondiendo pagar a cada uno cantidades directamente proporcionales al número de sus habitantes e inversamente proporcionales a la distancia de los mismos al puente. Averiguar cuánto le corresponde pagar a cada uno, sabiendo que el pueblo *A* tiene 13.000 habitantes y dista 4 Km. del puente, y el pueblo *B* tiene 8.000 habitantes y dista del puente 3 Km.

517. Dividir el ángulo 78° 26′ 15″ en partes proporcionales a 1, 3, 5.

518. Tres personas se han asociado para explotar un negocio. La primera aporta 15.650 ptas., la segunda 37.800 ptas. y la tercera 41.920 ptas. Si las ganancias han sido de 38.148 ptas., ¿cuánto corresponde a cada una?

519. Cuatro individuos forman sociedad. Los capitales impuestos son de 52.000 pesetas, 87.500 ptas., 168.000 ptas. y 182.000 ptas., respectivamente. Sabiendo que en el reparto del beneficio conseguido, correspondieron al primero 25.200 pesetas, se desea averiguar cuánto ganaron los demás y cuál fue la ganancia total.

520. Tres personas constituídas en sociedad han reunido un capital de 1.184.000 pesetas. Después de un cierto tiempo se reparten los beneficios obtenidos, correspondiendo 25.000 ptas. a la primera, 32.500 a la segunda y 35.000 a la tercera. ¿Cuánto aportó cada una?

521. Tres personas *A*, *B* y *C* que formaban sociedad, deciden disolverla después de algún tiempo. En el reparto del capital social de que en ese momento disponían, corresponden 27.600 ptas. a *A*, 35.880 ptas. a *B* y 38.640 ptas. a *C*. Sabiendo que el beneficio obtenido por *A* ha sido de 2.000 ptas., se desea averiguar el capital que aportó cada persona al constituir la sociedad.

522. Se mezclan cantidades iguales de vino de tres clases: uno cuesta 8'50 pesetas el litro, otro a 9 ptas., y el tercero a 12'50 ptas. ¿A cómo resulta el precio de la mezcla?

523. Un panadero mezcló por partes iguales cinco clases de harina cuyos precios respectivos son 375, 308, 400, 550 y 650 pesetas el quintal métrico. ¿A cómo resulta el kilogramo de la mezcla?

524. Se han mezclado 55 litros de vino, de 7'25 ptas. el litro, con 70 litros de 10 ptas. y 108 litros de 12'50 ptas. ¿Cuánto valdrá el litro de la mezcla?

525. Se mezclan 45 Kg. de café, de 80 ptas. el kilogramo, con 18 Kg. de 72 pesetas y 9 Kg. de 64 ptas. ¿A qué precio resulta el Kg. de la mezcla?

526. Se han mezclado 12'200 Kg. de azúcar de 11'50 ptas. el Kg. con 7'600 kilogramos de 12'25 ptas. el Kg. ¿Qué % se gana vendiéndolo a 12'50 ptas. el kilogramo?

527. Se mezclan cierto número de litros de vino de 4'90 ptas. el litro con 18 litros de 5'40 ptas., resultando el litro de la mezcla a 5'08 ptas. ¿Cuántos litros se mezclaron de la primera clase?

528. Se mezcla vino de 5 ptas. el litro con vino de 6'50 ptas. el litro. ¿Qué cantidad de la primera clase hay que añadir a 80 litros de la segunda para que vendiéndolo a 6 ptas. se gane el 10 % de la compra?

529. Se mezclan 2 Kg. de un producto de 9 ptas. el Kg. con 3 Kg. de otro de 7'50 ptas. el Kg. ¿Qué tanto por ciento debe añadirse de agua para que el precio de la mezcla resulte a 7 ptas. el Kg.?

530. Se tiene un vino de 8 ptas. el litro y se quieren preparar 75 litros de su mezcla con agua, de modo que resulte al precio de 6'50 ptas. litro. ¿Qué cantidad del vino que tenemos y qué cantidad de agua se han de mezclar para conseguirlo?

531. Un comerciante mezcla 16 Kg. de café, que valen a 120 ptas. el Kg., con 4 Kg. de achicoria cuyo precio es de 15 ptas. el Kg., para vender la mezcla con un beneficio del 20 %. ¿A qué precio debe vender el kilo de la mezcla?

532. Se han fundido en uno solo tres lingotes de plata: uno de 480 gramos y ley 0'850; el segundo de 270 g. y ley 0'930, y el tercero de 825 g. y ley 0'900. ¿Cuál es la ley de la aleación?

533. ¿Qué peso se ha de tomar de cada una de dos barras de oro cuyas leyes respectivas son 0'884 y 0'905, para obtener 42 gramos de aleación con ley 0'892?

534. Averiguar el peso que se ha de tomar de un lingote de plata de ley 0'896 para que con 64 gramos de otro lingote, de ley 0'950, forme una aleación de ley 0'912.

535. ¿Qué cantidad de plata pura se ha de añadir a un lingote de plata de 342 gramos de peso y de ley 0'835, para que resulte una aleación de ley 0'955?

536. Se han fundido 6'513 Kg. de plata pura con 1'287 Kg. de cobre. ¿Cuál es la ley de la aleación?

537. Averiguar la cantidad de cobre que se ha de añadir a un lingote de plata de 3 Kg. de peso y de ley 0'900, para que el nuevo lingote tenga de ley 0'800?

538. Se tiene un lingote que contiene 300 gramos de oro y 100 gramos de cobre, y otro con 400 gramos de oro y 100 de cobre. Averiguar cuántos gramos se tienen que mezclar de cada uno de estos lingotes para obtener otro que contenga 320 gramos de oro y 100 de cobre.

539. Se tiene una barra de 800 gramos de plata y cobre, de ley 0'900. ¿Qué cantidad de cobre hay que añadir para que la ley sea de 0'835?

540. ¿De cuántos quilates es el oro de una barra de dicho metal cuya ley es de 0'900?

GEOMETRIA

19. Proporcionalidad entre segmentos

155. Rectas cortadas por un sistema de paralelas: TEOREMA. — *Si un sistema de rectas paralelas, al cortar a dos rectas cualesquiera, determina en una de ellas segmentos iguales, los correspondientes segmentos determinados en la otra son también iguales.*

Sean dos rectas cualesquiera MN y $M'N'$ (figuras 17 y 18). Tomemos en una de ellas, MN, dos segmentos AB y CD, iguales entre sí, y tracemos por sus extremos rectas paralelas AA', BB', CC' y DD'.

Vamos a demostrar que los segmentos $A'B'$ y $C'D'$, determinados en la otra, $M'N'$, son también iguales. Es decir, que

$$A'B' = C'D'$$

Distinguiremos dos casos, según sean o no paralelas las rectas MN y $M'N'$.

Primer caso: Si las rectas MN y $M'N'$ son paralelas (figura 17), como $AB = A'B'$ y $CD = C'D'$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, se verificará también

$$A'B' = C'D'$$

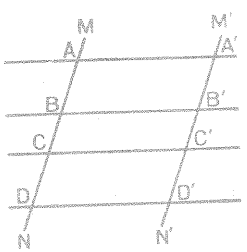


FIG. 17

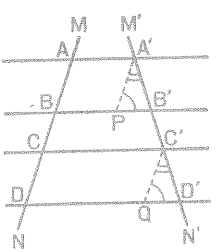


FIG. 18

puesto que los primeros miembros AB y CD son iguales, y *dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.* (PROPIEDAD TRANSITIVA de la igualdad).

Segundo caso: Las rectas MN y $M'N'$ no son paralelas (figura 18).

Tracemos por A' y C' los segmentos $A'P$ y $C'Q$, paralelos a MN, con lo que se habrán formado los paralelogramos $AA'PB$ y $CC'QD$, y en ellos tendremos que

$$AB = A'P \qquad \text{y} \qquad CD = C'Q$$

de donde, por ser $AB = CD$, se deduce

$$A'P = C'Q$$

Ahora bien: los triángulos $A'B'P$ y $C'D'Q$ son iguales, por tener iguales un lado ($A'P = C'Q$), y los ángulos a él contiguos (áng. en P = ángulo en Q y áng. en A' = áng. en C', pues son ángulos de lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido). Por consiguiente,

$$A'B' = C'D'$$

resultado que está de acuerdo con el enunciado del teorema.

Teorema de Tales (*)

Si varias rectas paralelas cortan a dos rectas cualesquiera, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra.

Sean MN y $M'N'$ (fig. 19) dos rectas cualesquiera cortadas por las secantes AA', BB', CC', DD'.

Tomemos una medida común a los segmentos AB, BC y CD. Supongamos que esa medida cabe 2 veces en AB; 4 en BC y 3 en CD.

Tracemos por los puntos de división las paralelas punteadas, las cuales dividirán a $A'B'$, $B'C'$ y $C'D'$ en 2, 4 y 3 partes, iguales entre sí.

Tendremos las siguientes proporciones:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{4}; \quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{4}; \qquad \therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \text{ ó } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad [1]$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{4}{3}; \quad \frac{B'C'}{C'D'} = \frac{4}{3}; \qquad \therefore \quad \frac{BC}{CD} = \frac{B'C'}{C'D'} \text{ ó } \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \quad [2]$$

Finalmente, de [1] y [2] resulta: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$

(*) TALES DE MILETO (¿624-547? a. de J. C.), uno de los *siete sabios* de Grecia, fue quien primero demostró este teorema.

156. El teorema de Tales aplicado a los triángulos. — Una consecuencia derivada del teorema de Tales, que por su importancia se enuncia como teorema principal, es la siguiente:

TEOREMA. — *Dos rectas que forman ángulo, al ser cortadas por dos paralelas, determinan, con éstas, dos triángulos cuyos lados son proporcionales* (*).

En efecto: consideremos las rectas AB y AC, que al ser cortadas por las paralelas BC y DE determinan los triángulos ABC y ADE (figura 20).

Vamos a demostrar que los lados de dichos triángulos son proporcionales, o sea, que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

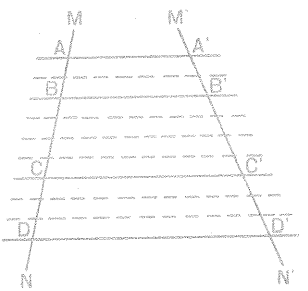


FIG. 19

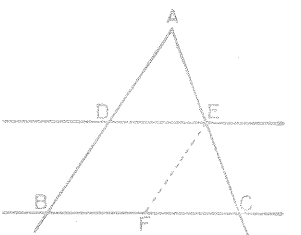


FIG. 20

Aplicando el teorema de Tales a las rectas AB y AC, tendremos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Tracemos ahora por E una paralela a AB y apliquemos el mismo teorema a las rectas CA y CB, cortadas por las paralelas AB y EF; resulta

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}$$

(*) Otra manera frecuente de enunciar este teorema es como sigue: *Una paralela a un lado de un triángulo, determina con los otros dos un nuevo triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primero.*

De las dos proporciones anteriores, teniendo en cuenta que $BF = DE$ por ser partes de paralelas comprendidas entre paralelas, se deduce

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

como queríamos demostrar.

157. División de un segmento en partes iguales. — Sea AB (figura 21) el segmento rectilíneo que deseamos dividir en tres partes iguales, por ejemplo.

Trazaremos una recta AC que forme ángulo con AB, y a partir de A tomaremos sobre ella tres segmentos consecutivos e iguales,

$$AD = DE = EF$$

Si unimos ahora los puntos F y B por una recta FB, y construímos las paralelas a ella EH y DG por los puntos E y D, habremos dividido el segmento AB en tres partes iguales,

$$AG = GH = HB$$

ya que, según el teorema del párrafo 155, las paralelas trazadas determinan en AB segmentos iguales, por ser iguales entre sí los segmentos que dichas paralelas interceptan en AC.

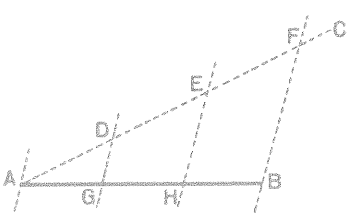


FIG. 21

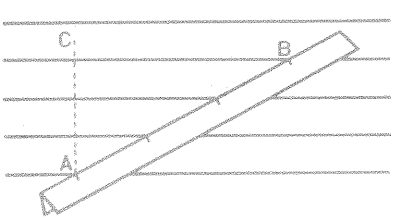


FIG. 22

La operación resulta más sencilla, tomando el segmento AB en el transportador de segmentos (fig. 22) y llevándolo sobre un sistema de paralelas *equidistantes* (las rayas de un cuaderno, por ejemplo), de manera que los extremos A y B estén situados en dos paralelas, entre las cuales haya tantos espacios como divisiones deseamos hacer. Las paralelas intermedias cortarán a AB en los puntos que buscamos.

Basta, para demostrarlo, trazar AC perpendicular a las paralelas; éstas, por ser equidistantes, interceptan en AC segmentos iguales y, por consiguiente, iguales serán también los determinados en AB.

158. Cuarto proporcional respecto de tres segmentos. — Dados tres segmentos a, b y c, se llama *cuarto proporcional* al segmento x que cumple la condición

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados. Sean a, b y c (fig. 23) los tres segmentos conocidos. Podemos proceder de dos maneras:

1) Trazando dos semirrectas con el origen común en A, tomaremos en una de ellas, a partir de A, dos segmentos consecutivos AB y BC, iguales respectivamente a a y b. Sobre la otra, tomaremos el AD, igual a c.

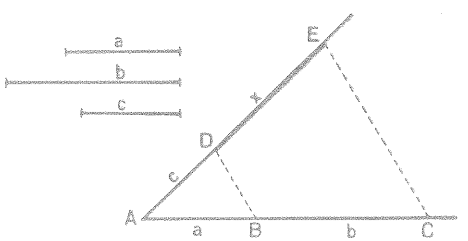


FIG. 23

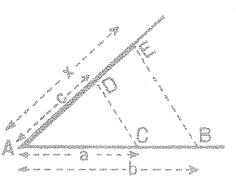


FIG. 24

Bastará luego unir B con D y trazar por C la paralela CE a BD. Habremos determinado así el segmento DE, que cumple las condiciones arriba indicadas.

Efectivamente: los segmentos AB, BC, AD y DE pueden considerarse como los interceptados en las rectas AC y AE por las paralelas EC, DB y el punto A, por lo que se verifica

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

2) En vez de tomar consecutivamente los segmentos a y b sobre AB, podemos llevarlos a partir del mismo origen A, como se indica en la figura 24). Entonces, la solución pedida será $x = AE$, ya que en efecto, según el párrafo 156, es

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$$

159. Tercero proporcional respecto de dos segmentos. — Dados dos segmentos a y b, se llama *tercero proporcional* respecto de ellos, al segmento x, tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Construcción. La construcción del tercero proporcional es un caso particular del problema anterior, cuando es $b = c$.

160. Descomposición de un segmento en partes proporcionales a otros segmentos dados. — Sea AB (fig. 25) el segmento que deseamos dividir en partes proporcionales a los segmentos m, n y p.

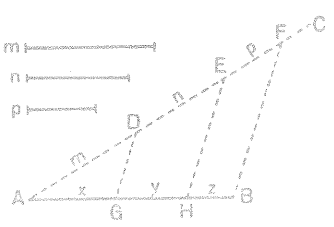


FIG. 25

Trazaremos por el punto A una semirrecta cualquiera AC que forme ángulo con AB, y en ella tomaremos sucesivamente los segmentos

$$AD = m \qquad DE = n \qquad EF = p$$

Uniremos luego B con F, y por los puntos E y D trazaremos paralelas a BF. De este modo, obtendremos los segmentos x, y, z, que cumplen la condición requerida, pues, en virtud del teorema de Tales, se verifica que

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

EJERCICIOS

541. En la figura 1, *AF, BG, CH, DI* y *EJ* son paralelas, y $AB=BC=CD=DE$. Suponiendo que *FG* mide 18 mm., ¿cuál será la longitud de *GH, HI* e *IJ*?

542. Demostrar el teorema del párrafo 155, utilizando la figura 1.

543. Demotrar que si varias paralelas al cortar a dos rectas, *MN* y *M'N'*, determinan en *MN* varios segmentos de los cuales uno de ellos, *CD*, es suma de otros dos, *AB* y *BC*, el segmento *C'D'* de *M'N'* correspondiente al *CD* es también suma de los segmentos *A'B'* y *B'C'* correspondientes respectivamente a *AB* y *BC* (fig. 2).

544. Suponiendo que *AB* (fig. 2) es igual a 4 mm., $BC = 5$ mm. y $A'B' = 6$ milímetros, averiguar la longitud de *A'C'*.

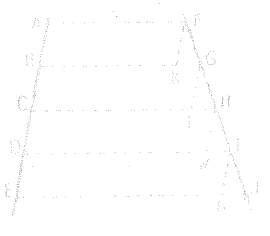


FIG. 1

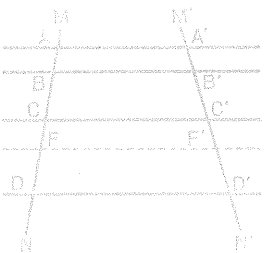


FIG. 2

545. En la figura 20 (párrafo 156), suponemos que $AB=48$ mm., $AC=54$ milímetros, $BC = 36$ mm. y $AD = 32$ mm. Calcular, según esto, cuánto medirán *AE* y *DE*.

546. En la misma figura 20, suponemos ahora que $AB = 108$ m., $AD = 72$ m. y $EC = 27$ m. Hallar, en este caso, cuánto medirán *AC* y *AE*.

547. En el trapecio *ABCD* (fig. 3), *EF* es paralela a *AB*. ¿Qué longitud tendrá *BF*, suponiendo que $DE=15$ cm., $EA=23$ cm. y $FC=13$ cm.?

FIG. 3

548. En la figura 4, *AE, BF, CG* y *DH* son paralelas. Si suponemos que $AB = 12$ mm., $BC = 16$ mm., $CD = 26$ mm. y $EF = 13$ mm., ¿cuál será la longitud de *FG* y *GH*?

549. En la figura 5, *FI* y *BE* son paralelas. Suponiendo que $AF = 14$ cm., $BF = 11$ cm., $AG = 12$ cm., $AH = 15$ cm. y $AI = 18$ cm., ¿qué longitud tendrán *CG, DH* y *EI*?

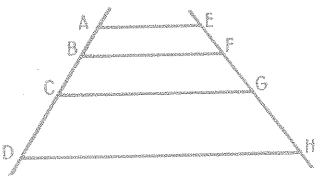


FIG. 4

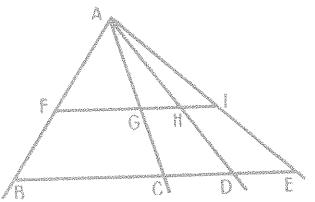


FIG. 5

550. Los lados AB, BC y CA de un triángulo ABC, miden, respectivamente, 6 cm., 7 cm. y 8 cm. Por un punto D situado en AB, a 4 cm. de A, trazamos una paralela DE al lado BC. ¿Qué longitud tendrán los lados del triángulo ADE? Comprobar el resultado gráficamente.

551. Las bases de un trapecio miden 4 cm. y 12 cm., y los lados no paralelos, 5 cm. y 7 cm. Averiguar el perímetro del triángulo formado por la base menor y las prolongaciones de los lados no paralelos.

552. La mediatriz de un cateto, ¿en qué punto corta a la hipotenusa? Razonar la contestación.

553. Tenemos un paralelogramo $ABCD$; unimos C con C', punto medio de AD, y A con A', punto medio de BC. Se trata de deducir lo siguiente: 1.º, que CC' y AA' son paralelas; 2.º, que estas rectas, CC' y AA', dividen a la diagonal BD en tres partes iguales.

554. Trazar una circunferencia de 3 cm. de radio, y dividir luego el diámetro en 7 partes iguales.

555. Construir un segmento que sea cuarto proporcional a otros tres dados, cuyas longitudes son 20, 25 y 34 mm., respectivamente. Calcular luego por Aritmética la medida de dicho segmento.

556. Construir un segmento que sea tercero proporcional a otros dos cuyas medidas son 30 y 27 mm., respectivamente. Calcular luego su medida numéricamente.

557. Dividir el segmento $AB = 8$ cm. en partes proporcionales a los segmentos $a = 15$ mm., $b = 26$ mm., $c = 17$ mm. y $d = 1$ cm.

558. Dado el segmento $AB = 6$ cm., dividirlo en partes proporcionales a los números 1, 3 y 7.

20. Semejanza de triángulos

161. Definiciones y propiedades. — *Dos triángulos se dice que son semejantes, cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados son ordenadamente proporcionales.*

ELEMENTOS HOMÓLOGOS. — En dos triángulos semejantes (fig. 26) se han de verificar las siguientes relaciones:

$$\hat{A} = \hat{A}', \qquad \hat{B} = \hat{B}', \qquad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

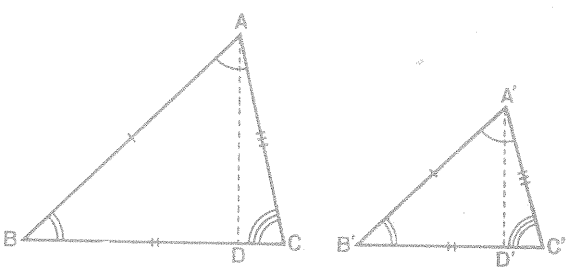


FIG. 26

ELEMENTOS HOMÓLOGOS. — En dos triángulos semejantes (fig. 26), denominaremos:

Ángulos homólogos, a los que son respectivamente iguales, como A y A', B y B', C y C'.

Vértices homólogos, a los correspondientes a ángulos homólogos.

Lados homólogos, a los que unen vértices homólogos, como AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CA y $C'A'$.

Alturas homólogas, a las que parten de vértices homólogos, como AD y $A'D'$. Análogamente se definen las *bisectrices y medianas homólogas*.

RAZÓN DE SEMEJANZA. — El valor constante del cociente de cada dos lados homólogos, se llama *razón de semejanza.*

Así, si designamos por k la razón de semejanza de los triángulos de la figura 26, tendremos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k,$$

de donde,

$$AB = k \cdot A'B', \qquad BC = k \cdot B'C', \qquad CA = k \cdot C'A'$$

Es decir que, cada lado del primer triángulo es igual a k veces su homólogo del segundo. Por eso, a la constante k se le llama también *factor de proporcionalidad.*

Dos triángulos iguales pueden considerarse como semejantes, pues, además de tener iguales sus ángulos, la razón de cada dos lados homólogos es 1.

Otro ejemplo de triángulos semejantes lo tenemos en dos triángulos *equiláteros* cualesquiera, ABC y $A'B'C'$, pues, además de tener iguales sus ángulos, por ser

$$AB = BC = CA$$
$$A'B' = B'C' = C'A'$$

se verifica $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$

OBSERVACIÓN. — De la definición de triángulos semejantes, se deduce que *dos triángulos semejantes a un tercero son semejantes entre sí.*

162. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Toda paralela a un lado de un triángulo, determina con los otros dos, un triángulo semejante al primero.

Supongamos un triángulo ABC (fig. 27), en el que hemos trazado la recta DE, paralela al lado BC.

Con esto se ha formado un triángulo ADE, que decimos es semejante al ABC. Para probarlo, hemos de demostrar que ambos triángulos, ABC y ADE, tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

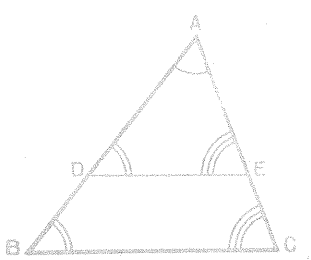


FIG. 27

Los ángulos son iguales, ya que el ángulo A es común; el ángulo en B y el ángulo en D son iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, y por la misma razón lo son los ángulos de vértices C y E.

Los lados son proporcionales, según quedó demostrado en el párrafo número 156.

163. Casos de semejanza de triángulos cualesquiera. — Análogamente a lo que sucede con la igualdad, para poder afirmar que dos triángulos son semejantes, basta que satisfagan ciertas condiciones, que constituyen los llamados *criterios de semejanza* o *casos de semejanza de triángulos.*

PRIMER CASO.

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 28), en los que supondremos

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{y} \quad \hat{B} = \hat{B}'$$

Vamos a demostrar que dichos triángulos son semejantes.

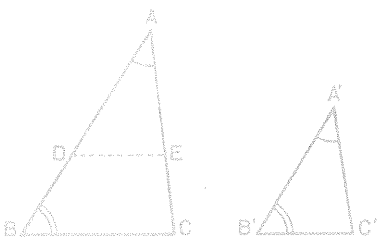


FIG. 28

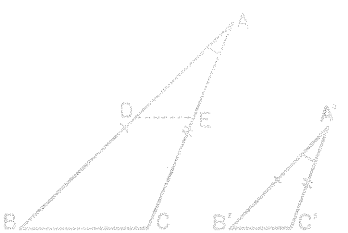


FIG. 29

A partir de A, tomemos sobre AB un segmento $AD = A'B'$, y tracemos DE paralela a BC. Los triángulos ADE y ABC son semejantes, según el teorema anterior. Pero $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$, por tener un lado igual e iguales los ángulos adyacentes a dicho lado; en efecto, sucede que

$$AD = A'B', \text{ por construcción}$$

$$\hat{A} = \hat{A}', \text{ por hipótesis}$$

$$\hat{D} = \hat{B}', \text{ por ser } \hat{D} = \hat{B} \text{ y por suponer } \hat{B} = \hat{B}'$$

Ahora bien: si $\triangle A'B'C'$ es igual a un triángulo semejante al ABC, aquél, $A'B'C'$, y éste, ABC, serán semejantes.

SEGUNDO CASO.

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman.

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 29), en los que suponemos que

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{y} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Vamos a demostrar que dichos triángulos son semejantes.

Tomemos sobre AB un segmento $AD = A'B'$ y tracemos la paralela DE al lado BC. Se habrá formado el triángulo ADE, semejante al ABC, verificándose, por tanto, que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Comparando esta proporción con la que arriba hemos supuesto y teniendo en cuenta que $AD = A'B'$ por construcción, se deduce que $AE = A'C'$, pues hallando sus valores en las respectivas proporciones, obtendríamos el mismo resultado.

En consecuencia, los triángulos ADE y $A'B'C'$ tienen

$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad AD = A'B' \qquad AE = A'C'$$

por lo que serán iguales.

Y siendo el triángulo $A'B'C'$ igual al ADE, semejante al ABC, será el $A'B'C'$ semejante al ABC.

TERCER CASO.

Dos triángulos son semejantes si los lados homólogos son proporcionales.

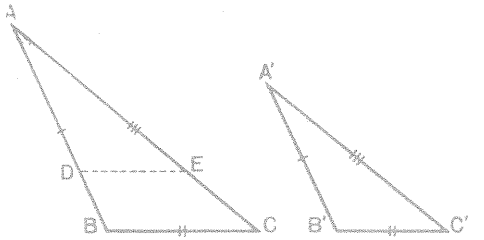


FIG. 30

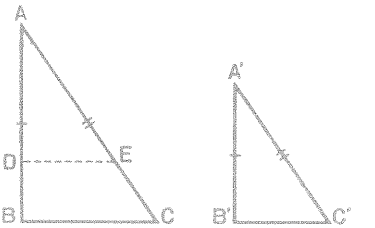


FIG. 31

Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 30), en los que supondremos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Dichos triángulos serán semejantes.

En efecto: tomemos sobre el lado AB un segmento $AD = A'B'$ y tracemos la paralela DE. Se habrá formado un triángulo ADE, semejante al ABC, por lo que se verifica

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

Comparando este resultado con la hipótesis y observando que, por construcción, es $AD = A'B'$, se deduce que los segmentos AE y DE son respectivamente iguales a $A'C'$ y $B'C'$.

De donde resulta que los triángulos ADE y $A'B'C'$ son iguales, pues

$$AD = A'B' \qquad DE = B'C' \qquad AE = A'C'$$

Y si $\triangle A'B'C' = \triangle ADE$, y éste es semejante al ABC, los triángulos $A'B'C'$ y ABC serán semejantes.

164. Casos de semejanza de triángulos rectángulos.— Según acabamos de ver, para asegurar que dos triángulos cualesquiera son semejantes, necesitamos fijar dos condiciones, que van expresadas por sendas igualdades. En los triángulos rectángulos, como se puede establecer siempre la igualdad de los ángulos rectos, basta una condición para asegurar que son semejantes. Así, los dos primeros casos anteriores se reducen a los siguientes cuando se trata de triángulos rectángulos:

1.° **Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.**

2.° **Dos triángulos rectángulos son semejantes si los catetos de uno son proporcionales a los del otro.**

3.° **Dos triángulos rectángulos son semejantes si la hipotenusa y un cateto de uno son proporcionales a la hipotenusa y un cateto del otro.**

La demostración de este tercer caso la hacemos siguiendo un razonamiento análogo al empleado en el segundo caso de semejanza de triángulos cualesquiera.

Sean los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 31), en los que supondremos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

y vamos a demostrar que son semejantes.

Tomemos $AD = A'B'$ y tracemos por D una paralela al lado BC. Se habrá formado un triángulo ADE semejante al ABC, y, en consecuencia, se verificará

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}; \quad \text{pero hemos supuesto que} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

y se ha construído $AD = A'B'$; luego, si hallamos los valores de AE y $A'C'$ en esas proporciones, veremos que son iguales.

Según esto, los triángulos rectángulos ADE y $A'B'C'$ tienen iguales la hipotenusa, $AE = A'C'$, y un cateto, $AD = A'B'$, por lo que serán triángulos iguales.

De todo lo cual se deduce que el triángulo $A'B'C'$ es semejante al ABC, pues lo es su igual el ADE.

165. Razón de las alturas de dos triángulos semejantes.

Las alturas de dos triángulos semejantes son proporcionales a las bases correspondientes.

Si suponemos que los triángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 32) son semejantes, podremos escribir:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

y como los triángulos ABD y $A'B'D'$ son también semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo igual, $B = B'$, tendremos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$$

Comparando ahora las dos proporciones obtenidas, deducimos esta otra

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'}$$

que demuestra la proposición arriba enunciada.

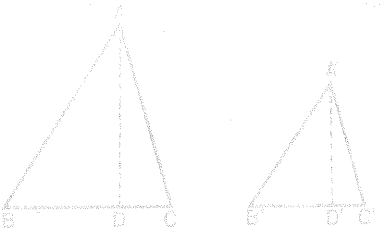


FIG. 32

166. APLICACIÓN: Razón de las áreas de dos triángulos semejantes. — *La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.*

Sean T y T' dos triángulos semejantes y k su razón de semejanza. Designando por b y h la base y altura del primero, y por b' y h' la base y altura del segundo, tendremos:

$$\frac{\text{área } T}{\text{área } T'} = \frac{\frac{1}{2}\, b \times h}{\frac{1}{2}\, b' \times h'} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'} = k \times k = k^2$$

ya que, según el párrafo anterior, es

$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k$$

EJERCICIOS

559. Los lados de un triángulo ABC miden: $a = 18$ mm., $b = 24$ mm., $c = 26$ mm., y los de otro triángulo $A'B'C'$: $a' = 27$ mm., $b' = 36$ mm., $c' = 39$ milímetros. ¿Son semejantes? Construirlos e indicar cuáles son los vértices homólogos y la razón de semejanza.

560. Construir primeramente un triángulo ABC con estos datos: $a = 20$ mm., $b = 25$ mm., $c = 35$ mm. Construir luego otro $A'B'C'$, semejante al anterior, cuyos lados tengan por suma un segmento rectilíneo de 48 mm. de longitud. ¿Cuál es la razón de semejanza?

561. Se tiene un triángulo ABC. Por el punto medio del lado c, trazamos una paralela MN al lado b. Demostrar que $MN = \frac{1}{2} b$.

562. Se tiene un triángulo ABC, y se unen los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos se habrán formado? ¿Cómo son entre sí esos triángulos? Razonar la contestación.

563. Construir un triángulo, dados los puntos medios de sus lados.

564. Sabiendo que las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente y en su punto medio, deducir que la figura que resulta al unir los puntos medios de sus lados, es un rectángulo.

565. Se tiene un trapecio $ABCD$ en el que se ha trazado una de las diagonales AC. Demostrar que la paralela media MN es igual a la semisuma de las bases.

566. Se sabe que dos lados de un triángulo miden, respectivamente, 42 mm. y 45 mm., y que forman un ángulo de 30°. Construir dicho triángulo y luego otro semejante, de modo que la razón de semejanza entre éste y el primero sea $k = \frac{2}{3}$.

567. Un lado de un triángulo mide 6 cm., y los ángulos adyacentes a dicho lado 40° y 55°, respectivamente. Construir primero ese triángulo y luego otro semejante a él, tomando como lado homólogo del dado, un segmento de 4 cm. de longitud. ¿Cuál es la razón de semejanza?

568. Los lados a, b, c de un triángulo miden 15 m., 13 m. y 10 m., respectivamente. Calcular los lados a', b', c' del triángulo semejante cuyo perímetro sea de 57 metros.

569. Los lados a, b, c de un triángulo miden 36 m., 30 m. y 27 m., respectivamente. ¿Cuál es el perímetro del triángulo semejante cuyo lado a' mide 24 m.?

570. Se tiene un trapecio $ABCD$ cuyas bases BC y AD miden, respectivamente, 40 m. y 30 m. ¿Cuánto medirá la altura h de dicho trapecio, sabiendo que la altura h' del triángulo PAD que se obtiene prolongando los lados no paralelos AB y DC, mide 48 m.?

571. ¿En qué relación estarán las áreas de dos triángulos semejantes cuyas bases respectivas miden 40 m. y 30 m.? Comprobarlo con los triángulos PBC y PAD que se forman al construir la figura correspondiente al ejercicio anterior.

572. Las áreas de dos triángulos semejantes son 9.702 m^2 y 12.672 m^2, respectivamente. ¿Cuál será su razón de semejanza?

21. Semejanzas de polígonos

167. Polígonos homotéticos.— *Si los vértices de un polígono cualquiera* ABCD *se unen mediante rectas a un punto* O, *y a partir de éste se determinan puntos* A′, B′, C′, D′, *sobre dichas rectas* (fig. 33), *o sobre sus prolongaciones* (fig. 34), *tales que se verifique*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'} = k,$$

decimos que los polígonos ABCD *y* A′B′C′D′ *son homotéticos respecto del punto* O.

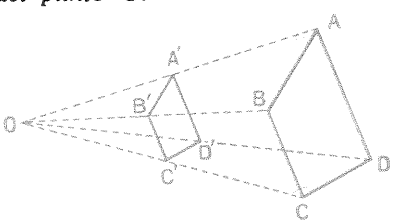


FIG. 33

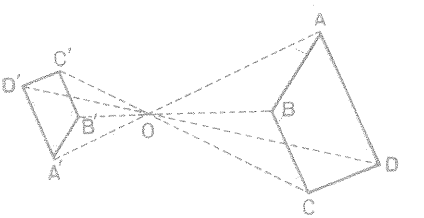


FIG. 34

El punto *O* se llama *centro de homotecia* y *k* se denomina *razón de homotecia.*

Si los dos polígonos homotéticos están situados a un mismo lado del centro de homotecia, ésta se dice *directa* (fig. 33), y si están situados a distinto lado, se denomina *inversa* (fig. 34).

Consecuencia de la anterior definición, son las tres propiedades siguientes:

1.ª *Los lados de dos polígonos homotéticos son respectivamente paralelos.*

Es decir (figs. 33 y 34):

$$AB \parallel A'B'; \qquad BC \parallel B'C'; \qquad CD \parallel C'D'; \qquad DA \parallel D'A'$$

En efecto: según el recíproco del teorema de Tales (156), las rectas *AB* y *A′B′*, que al cortar a *OA* y *OB* determinan en ellas segmentos proporcionales, habrán

de ser paralelas (*). Y lo mismo puede decirse de BC y $B'C'$, de CD y $C'D'$ y de DA y $D'A'$.

2.ª *Los lados de dos polígonos homotéticos son respectivamente proporcionales.*

Es decir (figs. 33 y 34):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

Considerando los triángulos semejantes AOB y $A'OB'$, junto con los BOC y $B'OC'$, tendremos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}; \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{de donde se deduce que} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Análogamente se probaría la proporcionalidad de los restantes lados, comparando cada par de triángulos semejantes con el que le sigue inmediatamente.

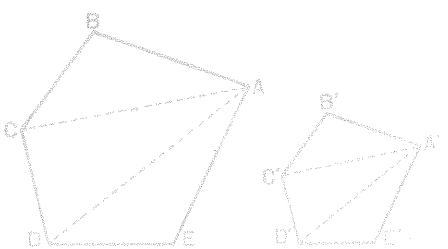


FIG. 35

3.ª *Los ángulos de dos polígonos homotéticos son respectivamente iguales.*

O sea (figs. 33 y 34):

$$\hat{A} = \hat{A}'; \qquad \hat{B} = \hat{B}';$$

$$\hat{C} = \hat{C}'; \qquad \hat{D} = \hat{D}'$$

Puesto que sus lados son paralelos y dirigidos en el mismo sentido (figura 33), o bien en sentido contrario (fig. 34).

168. **Polígonos semejantes.** — *Dos polígonos se dice que son semejantes, cuando sus ángulos, considerados en un orden determinado, son respectivamente iguales, y proporcionales los lados correspondientes.*

Así, por ejemplo, los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ (fig. 35) serán semejantes si se verifican las siguientes relaciones:

$$\hat{A} = \hat{A}'; \quad \hat{B} = \hat{B}'; \quad \hat{C} = \hat{C}'; \quad \hat{D} = \hat{D}'; \quad \hat{E} = \hat{E}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

(*) TEOREMA RECÍPROCO: Si dos rectas determinan segmentos proporcionales al cortar a otras dos que forman ángulo, dichas rectas son paralelas.

Como en los triángulos semejantes, llamamos *ángulos homólogos*, a los que son respectivamente iguales; *vértices homólogos*, a los correspondientes a ángulos homólogos; *lados homólogos*, a los que unen vértices homólogos. *Diagonales homólogas* son las que unen vértices homólogos no consecutivos.

Razón de semejanza es el valor constante del cociente de cada dos segmentos homólogos.

TEOREMA. — *Si en dos polígonos semejantes, a partir de dos vértices homólogos, se trazan todas las diagonales posibles, los dos polígonos quedan descompuestos en igual número de triángulos semejantes e igualmente dispuestos* (fig. 35).

La demostración de este teorema, que se funda en los casos de semejanza de triángulos, la proponemos como ejercicio a los alumnos.

169. **Homotecia y semejanza.** — Si nos fijamos en las características de los polígonos semejantes y las comparamos con las correspondientes de los polígonos homotéticos, vemos que éstos no son sino polígonos semejantes que tienen paralelos sus lados homólogos.

Es decir: *dos polígonos homotéticos son siempre semejantes, pero dos polígonos semejantes no siempre son homotéticos.*

La homotecia se define como *la semejanza de forma y de posición.* De modo que si cambiamos de posición a uno de dos polígonos homotéticos, dichos polígonos dejarán de ser homotéticos, pero seguirán siendo semejantes.

170. **Figuras semejantes en general.** — *Llámanse en general figuras semejantes, aquellas que tienen igual forma y diferente tamaño* (figuras 36 y 37).

Tratándose de figuras geométricas, éstas son semejantes si los ángulos que se corresponden ordenadamente son iguales, y la razón de sus líneas respectivas es constante (polígonos *ABCDE* y *A'B'C'D'E'* de la figura 35).

Para construir una figura semejante a otra, cuando ésta no es geométrica y no se dispone de aparatos especiales, lo más conveniente es proceder al trazado de una cuadrícula auxiliar que sirva de encaje a la figura; ésta queda así enmarcada en un rectángulo o en un cuadrado. Bastará luego construir otro semejante, de acuerdo con la escala o razón de semejanza que se nos señale, y trazar en él la correspondiente cuadrícula. Se dibujan después a pulso las curvas que componen

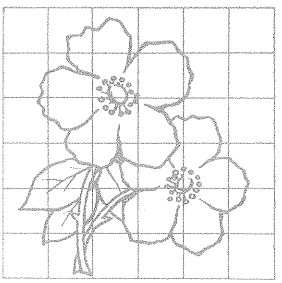


FIG. 36

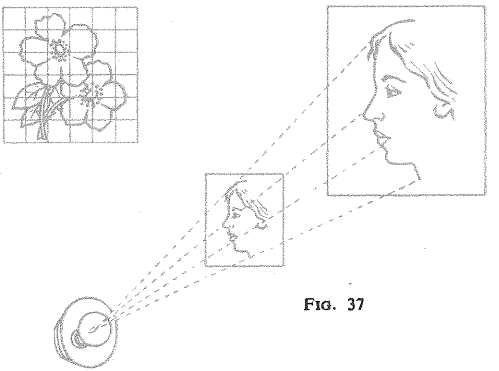


FIG. 37

la figura, cuidando de que la posición de las líneas y puntos homólogos se correspondan en la casilla o cuadro que según su situación les pertenece (fig. 36).

La proyección de una figura sobre un plano paralelo a la misma, valiéndose de un foco luminoso, da siempre una figura homotética a la primera y, por tanto, semejante a ella (fig. 37).

171. Figuras iguales. — *Se denominan figuras iguales, aquellas que tienen la misma forma y el mismo tamaño.*

Se define también a las figuras iguales, diciendo que *son aquellas a las que se les puede hacer coincidir por superposición.*

Figuras *directamente iguales* son las que pueden superponerse sin sacarlas del plano en que están dibujadas, con sólo moverlas sobre él.

Figuras *inversamente iguales* son las que sólo pueden hacerse coincidir sacando a una de ellas del plano del dibujo.

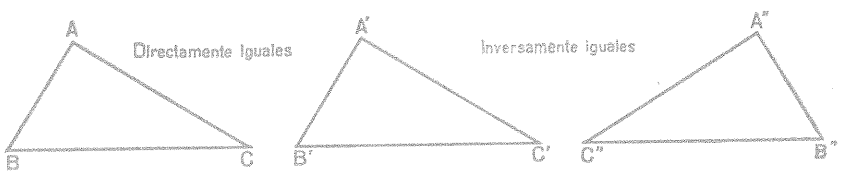


FIG. 38

Así, por ejemplo, los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la figura 38 son directamente iguales, ya que para hacerlos coincidir bastaría deslizar el $A'B'C'$ sobre el papel hasta que llegara a cubrir completamente el ABC. Por el contrario, si quisiéramos hacer coincidir el $A''B''C''$ con el $A'B'C'$ tendríamos que darle la vuelta, haciéndole girar 180° sobre el vértice C''.

Dos figuras iguales pueden considerarse como semejantes cuya razón de semejanza es la unidad.

172. Escalas. — *Tratándose de dibujos, planos, mapas, etc., que son siempre semejantes a los objetos que representan, se llama escala a la razón de semejanza entre las dimensiones de las representaciones y las de los objetos representados.*

La escala se indica generalmente por medio de una fracción cuyo numerador representa una longitud en el dibujo, plano, mapa, etc., y el denominador, la longitud verdadera que corresponde en el objeto representado, debiendo ir expresado en las mismas unidades que el numerador. Así, por ejemplo, si una dimensión de 1 cm. en el dibujo representa 5 m. del objeto, la escala es $\frac{1}{500}$.

Por tanto, designando por e la escala, por d una distancia en el dibujo y por D la correspondiente en la realidad, se tiene:

$$e = \frac{d}{D}; \qquad d = D \times e; \qquad D = \frac{d}{e}$$

Con el fin de facilitar los cálculos, en la elección de la escala se procura generalmente que el numerador sea igual a 1.

EJEMPLO. — Si en un mapa dibujado a la escala $\frac{1}{2{,}000.000}$, la distancia de dos ciudades es de 5 cm., su distancia real será

$$D = 5 : \frac{1}{2{,}000.000} = 5 \times 2{,}000.000 = 10{,}000.000 \text{ cm.} = 100 \text{ Km.}$$

Refiriéndonos al mismo mapa, si se consideran dos puntos cuya distancia real es de 70 Km., su distancia en el mapa será

$$d = 70 \times \frac{1}{2{,}000.000} = \frac{70}{2{,}000.000} = 0'000035 \text{ Km.} = 3'5 \text{ cm.}$$

En algunos planos y mapas, la escala numérica va acompañada de una *escala gráfica,* que es una recta dividida en partes iguales que repre-

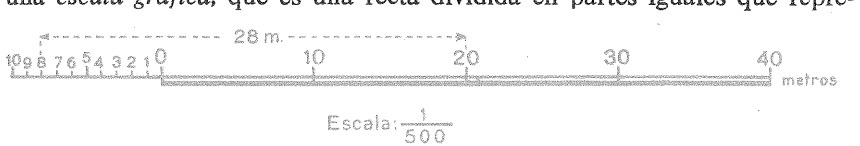


FIG. 39

sentan unidades determinadas de la realidad, como metros, kilómetros, etcétera. Esta escala tiene la ventaja de facilitar la determinación de las distancias verdaderas sin necesidad de acudir al cálculo.

La figura 39 representa la escala gráfica correspondiente a la numérica 1 : 500. Según ella, una línea del plano tomada con el compás, que abrace, por ejemplo, desde la división 20 hasta la 8, representa en el terreno una distancia de 28 metros; y al revés, si hay que establecer en dicho plano una distancia que en el terreno sea la expresada, se pondría una punta del compás en la división 20 y otra en la 8; la abertura que resulte será la longitud pedida.

173. **Construcción de polígonos semejantes.** — Para construir un polígono semejante a otro dado según una razón o escala conocida, el método más sencillo es construir un polígono homotético al primero que satisfaga las condiciones del problema.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere construir un polígono semejante al $ABCDE$ (figs. 40 y 41), siendo $\frac{3}{5}$ la razón de semejanza.

1.° *El centro de homotecia* O *lo situamos fuera del polígono* (figura 40). Por uno de los vértices del polígono dado, el A por ejemplo, trazamos una semirrecta en dirección conveniente. A partir de A tomamos sobre ella 5 segmentos iguales; el extremo O del último será el centro de homotecia. Uniremos luego el punto O con los restantes vértices del polígono y tomaremos el punto A' sobre la recta OA, situado en la tercera división a partir de O. Bastará después trazar la paralela $A'B'$ al lado AB, y a continuación las $B'C'$, paralela a BC; $C'D'$, paralela a CD, $D'E'$, paralela a DE, y $E'A'$, paralela a EA.

De este modo habremos obtenido el polígono $A'B'C'D'E'$ que es semejante al $ABCDE$, siendo $\frac{3}{5}$ la razón de semejanza.

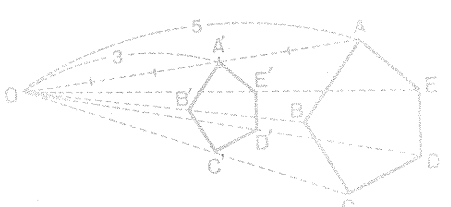


FIG. 40

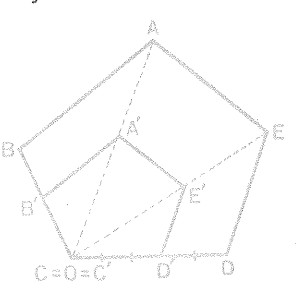


FIG. 41

2.° *El centro de homotecia* O *lo situamos en un vértice del polígono* (figura 41). Dividiremos en 5 partes iguales a uno de los lados que convergen en dicho punto, y tomaremos el punto D' de la tercera división.

Trazadas luego todas las diagonales CA y CE posibles, desde el vértice C, construiremos por D' la paralela $D'E'$ al lado DE; a continuación trazaremos la $E'A'$, paralela a EA y la $A'B'$, paralela a AB.

Se habrá formado así el polígono $A'B'C'D'E'$ que es semejante al $ABCDE$, siendo 3/5 la razón de semejanza.

174. El compás de reducción y el pantógrafo. — *El* COMPÁS DE REDUCCIÓN *es un aparato que sirve para reducir o ampliar figuras a una escala dada. Es una aplicación de la homotecia inversa.*

Consta de dos brazos sujetos por un tornillo-eje O (fig. 42) que puede deslizarse en una ranura, permitiendo así variar las distancias del centro de giro o las puntas de los brazos.

Las ranuras llevan divisiones numeradas que señalan dónde debe colocarse el eje de giro para obtener la reducción o ampliación deseada. La semejanza de los triángulos AOB y $A'OB'$ prueba que las distancias AB y $A'B'$ son proporcionales a OA y OA', ya que se tiene:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{5}{2}$$

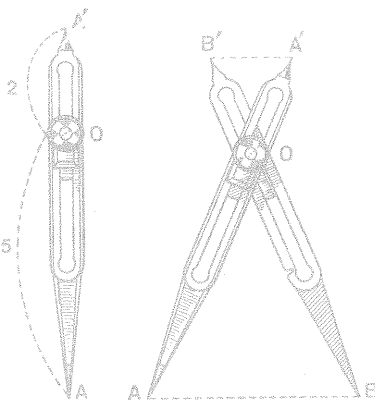


FIG. 42

El PANTÓGRAFO *es un instrumento que sirve para copiar figuras y al mismo tiempo reducirlas o ampliarlas. Es una aplicación de la homotecia directa.*

El tipo más sencillo de pantógrafo consta de cuatro varillas, unidas dos a dos por sus extremos, y los ángulos que resultan se hallan articulados entre sí en forma de paralelogramo deformable, $ABCD$ (fig. 43). El extremo P está dispuesto para poder ser fijado al tablero del dibujo; mediante el tornillo superior, todo el aparato gira alrededor de dicho punto, apoyándose sobre el pivote o ruedecita A.

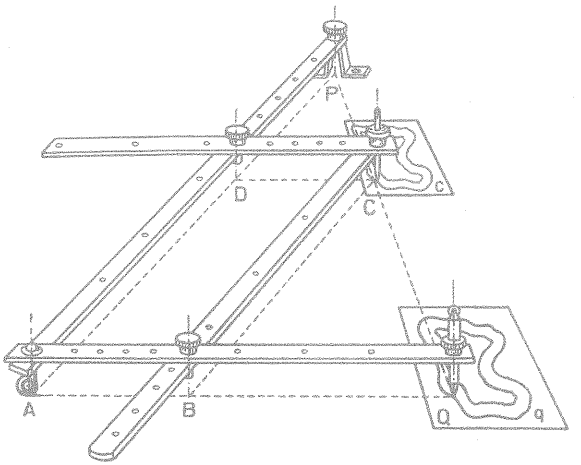


FIG. 43

Los puntos P, C y Q permanecen siempre alineados, aunque varíe la forma del paralelogramo (*). El punto C suele llevar un lápiz y el Q un punzón.

Si P permanece fijo y Q describe la figura q, C describirá la figura c, semejante a la q, obteniéndose así una figura reducida. Para obtenerla ampliada, basta colocar el original en C y permutar el punzón por el lápiz.

Siendo semejantes los triángulos PAQ y PDC, cualquiera que sea la posición del punzón y del lápiz, se verificará la proporción

$$\frac{PQ}{PC} = \frac{AQ}{DC}$$

Graduando convenientemente la longitud de los lados del paralelogramo, pueden obtenerse las reducciones o ampliaciones a la escala que se desee.

MODELO. — Construya el alumno un pantógrafo con cuatro tiras de cartón.

(*) La razón por la cual los puntos P, C y Q se hallan siempre en línea recta, es la semejanza de los triángulos PDC y CBQ. Estos triángulos, en efecto, tienen un ángulo igual ($D = B$) y proporcionales los lados que lo forman. Ahora bien: esto supuesto, como los terceros lados, PC y CQ, tienen un punto común, deberán hallarse sobre la misma recta.

175. Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes. — TEOREMA. *La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.*

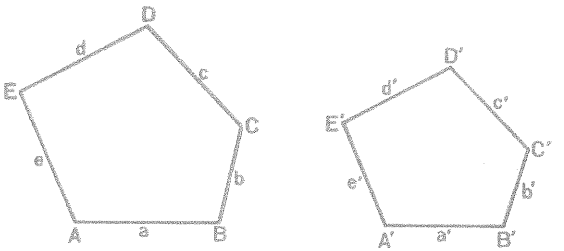


FIG. 44

En efecto: Sean $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ (figura 44) dos polígonos semejantes cuyos lados a, b, c, d, e, de uno, son homólogos de a', b', c', d', e', del otro. De la semejanza de los polígonos se deduce que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}$$

Sumando ahora los antecedentes por un lado y los consecuentes por otro, se tiene, según una propiedad de las razones iguales:

$$\frac{a+b+c+d+e}{a'+b'+c'+d'+e'} = \frac{a}{a'} \qquad \text{o sea, que} \qquad \frac{P}{P'} = k$$

como queríamos demostrar.

EJERCICIOS

573. La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es $\frac{13}{19}$. ¿Cuál será la longitud del lado AB del primero, si su homólogo $A'B'$ del segundo mide 76 milímetros?

574. Para reproducir, aumentada, una figura por medio de papel cuadriculado, la hemos encerrado en un cuadrado de 32 mm. de lado. ¿Qué longitud habremos de dar al lado del nuevo cuadrado si queremos que la razón de semejanza entre las dos figuras sea $\frac{2}{5}$?

575. La escala de un plano es 1 : 50. El plano representa la fachada de una casa y ésta mide en el dibujo 70 cm. Hallar la longitud real de esa fachada.

576. Se ha dibujado el plano de un campo a la escala 1 : 300. ¿Cuál será en el plano la distancia de dos puntos que en el terreno se hallen a 84 metros?

577. ¿A qué escala se ha dibujado un plano en el que un segmento de 23 centímetros representa 115 m. del terreno?

578. Calcular la escala de dos mapas, sabiendo que en el primero 10 Km. corresponden a 2 mm., y en el segundo, 70 Km. a 3'5 cm.

579. En un mapa hecho a la escala 1 : 10,000.000, dos ciudades distan 4'75 cm. ¿Cuál es su distancia verdadera?

580. Un terreno de forma triangular está representado, a la escala 1 : 2.500, por un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 56 y 42 mm. Calcular sus verdaderas dimensiones.

581. Dibujar a escala 1 : 800 un jardín de forma rectangular de 96 m. de largo por 74 m. de ancho, que tiene en el centro un estanque circular de 6 m. de radio.

582. Queremos hallar la distancia inaccesible entre dos puntos A y B, situados a la orilla de un lago. Para ello, medimos sobre el terreno una distancia $AC = 40$ m. y los ángulos que forman con AC las visuales AB y CB, que son, respectivamente, 40° y 60°. Con estos datos hemos dibujado el triángulo ABC a escala 1 : 1.000. ¿Cuál es la distancia real aproximada entre A y B?

583. Construir un pentágono cualquiera y otro semejante a él cuyos lados sean $\frac{3}{4}$ de los del primero.

584. El perímetro de un rectángulo mide 24 cm., y la razón de la base a la altura es 5 : 3. Construir el rectángulo.

585. Los perímetros de dos polígonos semejantes son 27 y 21 cm., respectivamente, y un lado del mayor mide 45 mm. Calcular la longitud de su homólogo en el otro polígono.

586. Calcular los lados de un pentágono cuyo perímetro es 55'20 metros, sabiendo que es semejante a otro en el que los lados miden, respectivamente, 45 mm., 38 mm., 43 mm., 28 mm. y 30 mm.

587. El perímetro de un pentágono es 6 metros. Averiguar cuánto miden sus lados, sabiendo que los de otro semejante tienen por longitud 0'8 m., 1'2 m., 2 m., 1'6 m. y 2'4 m., respectivamente.

588. Fijándose en la figura 1, demostrar que *la razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.* En dicha figura representamos por T_1, T_2, etc. las áreas de los triángulos respectivos.

589. Un lado de un polígono mide 28 mm. ¿Cuál será la longitud del lado homólogo en un polígono semejante que tenga 9 veces más de área que el primero.

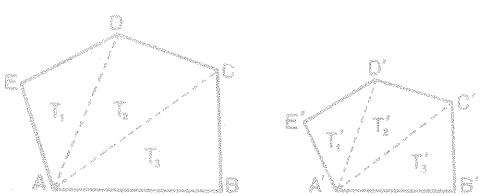


FIG 1

590. El lado AB de un polígono mide 12 cm., y su homólogo $A'B'$, en un polígono semejante, 7 cm. Sabiendo que el área de este segundo polígono es igual a 5.439 cm², se desea saber cuál es la del primero.

22. Arcos de circunferencia. - Angulos centrales

176. Igualdad y desigualdad de arcos.

Dos arcos, pertenecientes a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, son desiguales cuando no se les puede hacer coincidir por superposición.
Son iguales, si, superpuestos, coinciden.

177. Relaciones entre los arcos y sus cuerdas correspondientes.

1.° *A arcos iguales corresponden cuerdas iguales.*

En efecto: al ser iguales los arcos, se les puede hacer coincidir, por lo que sus cuerdas respectivas coincidirán también, puesto que tienen los mismos extremos.

2.° *Entre dos arcos desiguales,* MENORES QUE UNA SEMICIRCUNFERENCIA, *a mayor arco corresponde mayor cuerda.*

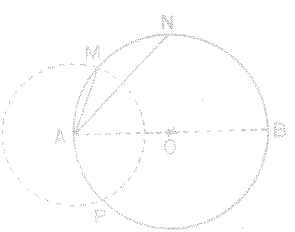


FIG. 45

Supongamos dos arcos desiguales AM y AN (figura 45) que podemos considerar en la misma circunferencia con el extremo A común. El otro extremo M del arco menor quedará dentro del arco mayor AN.

Si describimos una circunferencia con radio AM, haciendo centro en A, veremos que cortará a la dada en un punto P situado a distinto lado del diámetro AB, respecto de M. Todos los puntos del arco MAP quedarán dentro de la circunferencia trazada, en tanto que los puntos del arco $MNBP$ son exteriores a dicha circunferencia.

En consecuencia, el punto N como exterior que es a la circunferencia de centro A, distará de A una longitud AN mayor que AM. Luego, $AN > AM$, como se pretendía demostrar.

Obsérvese que la condición de que los arcos sean menores que una semicircunferencia, es esencial. Para los mayores, la proposición ya no es cierta, como sucede, por ejemplo, con los dos arcos desiguales que suman una circunferencia, a los que corresponde la misma cuerda.

178. Diámetro perpendicular a una cuerda.

En toda circunferencia, el diámetro perpendicular a una cuerda, divide a la cuerda y a sus arcos correspondientes en dos partes iguales.

Sea CD (fig. 46), el diámetro perpendicular a la cuerda AB.
Por ser radios de la circunferencia, se tiene que

$$OA = OB$$

Son, pues, dos oblicuas iguales cuyos pies sabemos equidistan del pie de la perpendicular.

Por tanto:

$$\mathbf{AE = EB}$$

Además, las cuerdas AC y BC son también iguales, por equidistar del pie de la perpendicular. Luego, sus arcos correspondientes son iguales.

$$\textbf{arco AC} = \textbf{arco BC}$$

Análogamente, demostraríamos que

$$\textbf{arco AD} = \textbf{arco BD}$$

179. Arcos comprendidos entre paralelas.

— *Los arcos de una circunferencia comprendidos entre paralelas son iguales.*

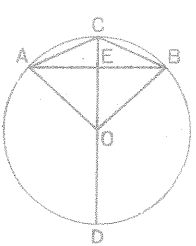


FIG. 46

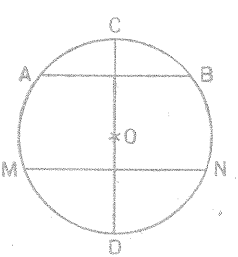


FIG. 47

Esta proposición es una consecuencia de la demostrada en el párrafo anterior. En efecto: de la figura 47 se deduce:

$$\text{arco } CAM = \text{arco } CBN$$
$$\text{arco } CA = \text{arco } CB$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, resulta:

$$\text{arco } AM = \text{arco } BN$$

180. Relaciones entre las cuerdas y sus distancias al centro. — En una misma circunferencia o en circunferencias iguales:

1.° *Dos cuerdas iguales equidistan del centro.* (y a la recíproca)

Consideremos en la circunferencia O (fig. 48) dos cuerdas AB y CD iguales entre sí.

Trazando desde O las respectivas perpendiculares OM y ON a las cuerdas AB y CD, dichas perpendiculares cortarán a las cuerdas precisamente en los puntos medios M y N (178). Luego, las distancias de O a las cuerdas AB y CD son los segmentos OM y ON, que unen el centro O con los puntos medios M y N.

Ahora bien: por un giro de rotación, podemos hacer coincidir los arcos iguales AB y CD, con lo que coincidirán las cuerdas correspondientes y, como consecuencia, sus puntos medios M y N. Como el punto O no ha cambiado de posición, las distancias OM y ON habrán coincidido, siendo, por tanto, iguales.

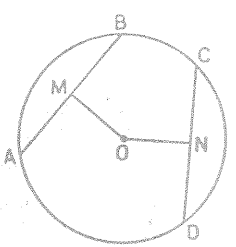


FIG. 48

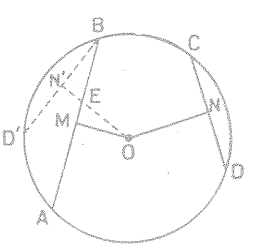


FIG. 49

2.° *Dos cuerdas desiguales, distan desigualmente del centro, y la mayor es la que dista menos.*

Supongamos en una misma circunferencia dos cuerdas AB y CD desiguales (fig. 49), y sean OM y ON las respectivas distancias al centro.

Si trazamos $BD' = CD$ y ON' perpendicular a BD', se tiene:

$ON = ON'$ por ser CD igual a BD'
$OM < OE$ por ser $OM \perp AB$ y OE oblicua
$OM < ON'$ por ser ON' mayor que OE
Luego, $OM < ON$ por ser ON' igual a ON.

181. Ángulo central. Arco correspondiente a un ángulo. — *En una circunferencia se dice que un ángulo es central cuando sus lados son semirrectas que parten del centro.*

Los lados de un ángulo central cortan a la circunferencia en dos puntos, extremos de un arco que se denomina *arco correspondiente* de dicho ángulo.

Dado un ángulo, le corresponderá un arco en cada circunferencia trazada tomando el vértice como centro. Y, recíprocamente, dado un arco de circunferencia, sus extremos determinarán con el centro dos semirrectas que formarán un ángulo central.

182. Proporcionalidad entre los ángulos centrales y los arcos correspondientes. — A cada arco corresponde un ángulo; a arcos iguales corresponden ángulos iguales; a doble, triple arco, corresponde ángulo (no cuerda) doble o triple. En consecuencia:

Los ángulos centrales y sus arcos correspondientes son directamente proporcionales.

183. Aplicación a la medición de ángulos. — De la proporcionalidad entre ángulos y arcos, se deduce lo siguiente:

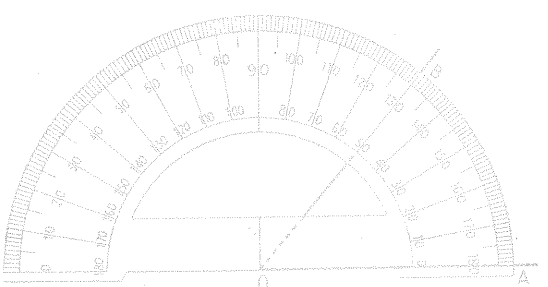


FIG. 50

Cuando se toma por unidad de arcos el arco correspondiente a la unidad de ángulos, todo ángulo tiene la misma medida que su arco correspondiente, cualquiera que sea el radio con que se trace.

Por consiguiente, medir un ángulo equivale

a medir uno de sus arcos correspondientes, operación que se practica valiéndose del transportador o *semicírculo graduado.*

Para ello se coloca el centro O del transportador sobre el vértice del ángulo que se quiere medir, y se hace coincidir el radio del transportador con un lado del ángulo (fig. 50). Bastará luego leer el número de la graduación por la que pasa el otro lado para tener la medida del ángulo, por ser ésa la medida de su arco correspondiente, trazado con radio igual al del semicírculo. Así, la medida obtenida para el ángulo AOB de la figura, es de 50°.

EJERCICIOS

591. En la figura 1 las rectas AB y CD son diámetros. Probar que arco AD = arco BC.

592. En la figura 2, los arcos AB, BC y CD son iguales. Probar que la cuerda AC es igual a la cuerda BD.

593. En la figura 3, AB es un diámetro y los ángulos a y b son iguales. Probar que los arcos AC y AD son también iguales.

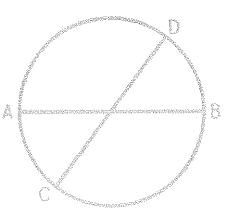


Fig. 1

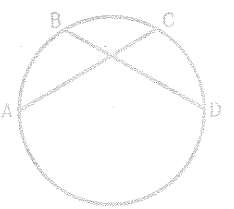


Fig. 2

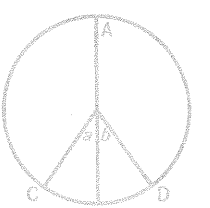


Fig. 3

594. En la figura 4, los arcos AC y BC son iguales; OA y OB son radios; CD y CE son perpendiculares a esos radios. Probar que $DC = CE$.

595. En la figura 5 hay dos circunferencias concéntricas cortadas por la recta AD. Probar que $AB = CD$.

596. En la figura 6, la recta AB pasa por el centro. Probar que $AB > AC$.

597. En una circunferencia se han trazado dos cuerdas paralelas AB y CD no equidistantes del centro. Demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles.

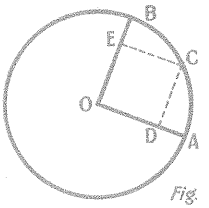


Fig. 4

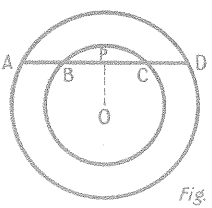


Fig. 5

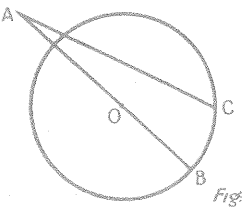


Fig. 6

598. Por los extremos A y B de un diámetro, se trazan dos cuerdas paralelas AC y BD. 1.° Comparar los triángulos AOC y BOD. 2.° Demostrar que los puntos C, O, D están en línea recta. 3.° Demostrar que las cuerdas son iguales.

599. Desde un punto de la bisectriz de un ángulo, tomado como centro, se traza una circunferencia que corta a los dos lados del ángulo. Demostrar que las cuerdas interceptadas son iguales.

600. Por dos puntos A y B simétricos con respecto al centro O de una circunferencia, se trazan dos cuerdas paralelas MAN y $M'BN'$, estando M y M' del mismo lado de AB. Se desea: 1.°, demostrar que $MN = M'N'$; 2.°, demostrar que los puntos M, O, N' están en línea recta; 3.°, comparar los triángulos OAM y OBN'; 4.°, demostrar que $AM = BN'$ y $AN = BM'$.

601. Dado un punto P situado en un círculo, trazar una cuerda en la circunferencia correspondiente, que tenga a P por punto medio.

602. ¿Cuál es la mayor cuerda que puede trazarse por un punto P situado en el interior de una circunferencia? ¿Y la menor?

603. La cuerda de un arco suma de otros dos, ¿es la suma de las cuerdas de éstos? Razonar la contestación.

604. Demostrar que la cuerda del arco cuyo ángulo central es 60°, es igual al radio.

605. Dividir una circunferencia en seis arcos iguales, utilizando el compás

23. Angulos en la circunferencia

184. Ángulo inscrito. — *Denominamos ángulo isncrito en una circunferencia, al que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por dos cuerdas.*

Un ángulo inscrito ABC (figs. 51 a 53) determina en la circunferencia un arco ABC que contiene al vértice y otro arco AC que no contiene al vértice. Se dice que el ángulo está inscrito en el primer arco y que abarca o comprende al segundo.

185. Medida del ángulo inscrito. — *La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Para demostrarlo consideraremos los tres casos posibles:

1.er CASO. — *Un lado pasa por el centro* (fig. 51).

Trácese el radio OA. En el triángulo ABO se tiene:

$$\begin{aligned} a &= a', && \text{por ser isósceles el } \triangle ABO \\ a + a' &= b, && \text{por ser el ángulo } b \text{ exterior al } \triangle ABO \text{ (*)} \\ 2\,a &= b, && \text{por ser } a = a' \end{aligned}$$

$$\text{luego, } a = \tfrac{1}{2}\, b$$

Y sustituyendo el ángulo b por su medida, el arco AC, resulta:

$$\text{medida del ángulo } a \text{ o } ABC = \tfrac{1}{2} \text{ arco } AC$$

2.º CASO. — *El centro está entre los lados* (fig. 52).

Trácese el diámetro BD. Tendremos:

$$\begin{aligned} &\text{ángulo } ABC = a + b \\ &\text{medida de } a = \tfrac{1}{2} \text{ arco } AD \\ &\text{medida de } b = \tfrac{1}{2} \text{ arco } DC \end{aligned}$$

(*) Recuérdese que *en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores que no le son adyacentes.*

Se ve, en efecto, que tanto el ángulo b como la suma de los ángulos a y a' tienen por suplemento el ángulo AOB del triángulo en cuestión; luego, $a + a' = b$.

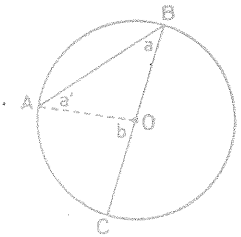


FIG. 51

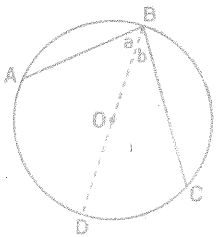


FIG. 52

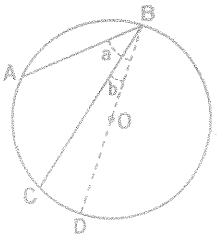


FIG. 53

Sumando las dos últimas igualdades, resulta:

medida del ángulo $ABC = \frac{1}{2}$ (arco AD + arco DC) = $\frac{1}{2}$ arco AC

3.er CASO. — *El centro está fuera del ángulo* (fig. 53).

Trácese el diámetro BD. Se tiene:

ángulo $ABC = a - b$
medida de $a = \frac{1}{2}$ arco AD
medida de $b = \frac{1}{2}$ arco CD

Restando las dos últimas igualdades, resulta:

medida del ángulo $ABC = \frac{1}{2}$ (arco AD − arco CD) = $\frac{1}{2}$ arco AC

186. **Consecuencias.** — Del teorema anterior se deducen las siguientes:

1.ª Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, es igual a un recto (*).

2.ª Todo ángulo inscrito en un arco mayor que una semicircunferencia, es agudo; y todo ángulo inscrito en un arco menor que una semicircunferencia, es obtuso.

3.ª Todos los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales.

4.ª Dos ángulos inscritos, uno en cada uno de los arcos correspondientes a una misma cuerda, son suplementarios.

(*) La construcción de la *prependicular a un segmento en uno de sus extremos* y la de un *triángulo rectángulo cuando se conocen la hipotenusa y un cateto*, se funda en esta consecuencia.

187. Ángulo semiinscrito. — *Se llama ángulo semiinscrito en la circunferencia, el que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente.* Ejemplo, el ABC (fig. 54).

Su MEDIDA *es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

En efecto: un ángulo semiinscrito puede considerarse como la posición límite que toma un ángulo inscrito, cuando uno de sus lados se va moviendo hasta convertirse en tangente.

Así, el ángulo inscrito A_1BC (figura 54) se ha transformado en el semiinscrito ABC. al girar la cuerda A_1B hasta tomar la posición de la tangente AB.

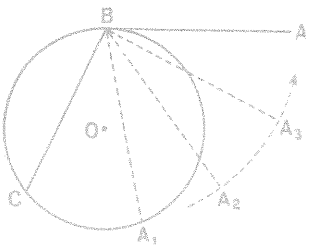


FIG. 54

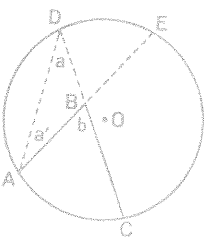


FIG. 55

188. Ángulo interior. — *Llamamos ángulo interior al formado por dos porciones de cuerdas que se cortan en el interior de la circunferencia.* Ejemplo, el ABC (fig. 55).

Su MEDIDA *es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.*

En efecto: prolonguemos los lados AB y CB hasta cortar a la circunferencia y unamos D con A. Considerando el triángulo ABD, se tiene:

angulo b = ángulo a + ángulo a', por ser el ángulo b exterior al triángulo
medida del ángulo $a = \frac{1}{2}$ arco AC, por ser inscrito
medida del ángulo $a' = \frac{1}{2}$ arco DE, por ser inscrito

Sumando las dos últimas igualdades, resulta:

medida del ángulo $b = \frac{1}{2}$ (arco AC + arco DE)

189. Ángulo exterior. — *Denominamos ángulo exterior al que tiene su vértice en el exterior de la circunferencia y está formado por dos se-*

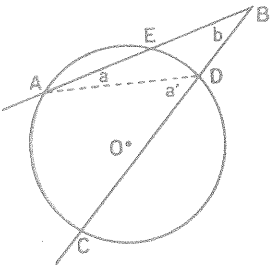


FIG. 56

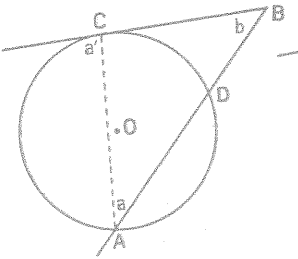


FIG. 57

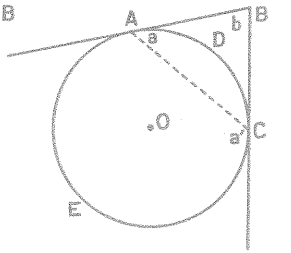


FIG. 58

cantes, por una secante y una tangente, o por dos tangentes. En este último caso se llama *ángulo circunscrito.*

Su MEDIDA *es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

Pueden presentarse tres casos:

1.er CASO. — *Los dos lados son secantes* (fig. 56).

Trazando la cuerda AD, se forma el triángulo ABD, en el que se verifica:

ángulo a + ángulo b = ángulo a', por ser el ángulo a' exterior al $\triangle ABD$; de donde,

ángulo b = ángulo a' − ángulo a, al restar a a los dos miembros

Por ser inscritos los ángulos a' y a, tendremos:

$$\text{medida del ángulo } b = \tfrac{1}{2} (\text{arco } AC - \text{arco } ED)$$

2.° CASO. — *Un lado es secante y el otro tangente* (fig. 57).

Por una demotración análoga a la empleada en el primer caso, se obtiene:

$$\text{medida del ángulo } b = \tfrac{1}{2} (\text{arco } AC - \text{arco } CD)$$

3.er CASO. — *Los lados son tangentes* (fig. 58).

Razonando de forma parecida a como se ha hecho en los casos anteriores, se llega al siguiente resultado:

$$\text{medida del ángulo } b = \tfrac{1}{2} (\text{arco } AEC - \text{arco } ADC)$$

CUADRO RESUMEN

ÁNGULO	MEDIDA
Central	*arco* comprendido entre los lados
Inscrito	*mitad del arco* comprendido entre los lados
Semiinscrito	*mitad del arco* comprendido entre los lados
Interior	*semisuma de los arcos* comprendidos entre los lados
Exterior	*semidiferencia de los arcos* comprendidos entre los lados

190. Arco capaz de un ángulo. — *Se llama arco capaz de un ángulo dado, al arco de circunferencia tal que todos los ángulos inscritos en él son iguales al dado.*

Consideremos una circunferencia O (fig. 59) y tracemos a ella una tangente AT y una cuerda AB, que forme con la tangente un ángulo BAT, igual a otro dado α. El ángulo así formado, BAT, será semiinscrito y su medida, igual a la mitad del arco ADB.

Por otra parte, vemos que todos los ángulos inscritos en el arco ACB, tienen también por medida la mitad del arco ADB y, por consiguiente, son iguales entre sí e iguales al ángulo dado α.

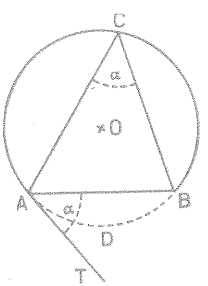
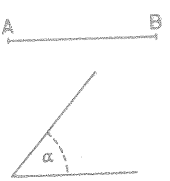


FIG. 59



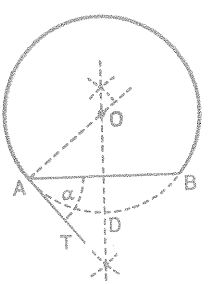


FIG. 60

191. Construcción de un arco capaz de un ángulo dado. — Lo dicho en el párrafo anterior nos permite resolver el siguiente

PROBLEMA. — *Sobre un segmento dado, considerado como cuerda, construir un arco capaz de un ángulo dado.*

Sea el segmento AB (fig. 60) sobre el que queremos trazar un arco capaz del ángulo dado α.

Como AB ha de ser una cuerda, el centro de la circunferencia a la que pertenezca el arco en cuestión, estará en la mediatriz de AB, ya que, como consecuencia de lo demostrado en el párrafo 178, la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

Si construímos luego el ángulo BAT igual al dado, sobre AB como lado, y le consideramos como semiinscrito, el lado AT será una tangente a la circunferencia, siendo A el punto de tangencia. Y como la perpendicular a la tangente, trazada por el punto de contacto, pasa por el centro de la circunferencia, construiremos la perpendicular a AT en el punto A.

Por consiguiente, si el centro que buscamos se encuentra a la vez en las rectas OD y OA, no puede ser otro que su intersección O.

Para obtener el arco pedido, bastará describir la circunferencia O de radio OA, que también pasa por B, por ser A y B equidistantes de O.

192. Arco capaz de un ángulo recto. — Cuando el ángulo de que se trata es recto, el arco capaz es una semicircunferencia que tiene por diámetro el segmento rectilíneo conocido, como ya dijimos (186, 1.ª).

EJERCICIOS

606. En la figura 1 se tiene: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 50°$. 1.° Calcular la medida de los ángulos BAC, BAD, ABC, BCA y ACD. 2.° Si el arco AB vale 32°, $BC = 2\,AB$ y $CD = 3\,AB$, calcular el valor de los mismos ángulos. 3.° Hágase el mismo cálculo, si BC vale 70°, $AB = \frac{1}{2}\,BC$ y $CD = 3\,BC$.

607. En la figura 2, el valor de los arcos es $GH = 43°$, $HI = 47°$, $IJ = 92°$, $JE = 44°$, $EF = 48°$. Hallar la medida de los ángulos DAB, ABC, BCD y CDA.

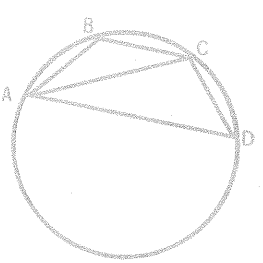


FIG 1

608. En la figura 3, el valor de los arcos es: $AB = 62°$, $BC = 58°$, $CD = 42°$ y $DE = 78°$. Hallar el valor de los ángulos A, B, C, D y E.

609. En la figura 4, todos los arcos son iguales. Hallar el valor de los ángulos ABC, ACD y AEF.

610. En la misma figura, hallar: 1.°, la suma de los ángulos ABC, BCA y CAB; 2.°, la suma de ACE, CEA y EAC; 3.°, la suma de los ángulos CDE, DEC y ECD; 4.°, decir cómo son entre sí esas sumas.

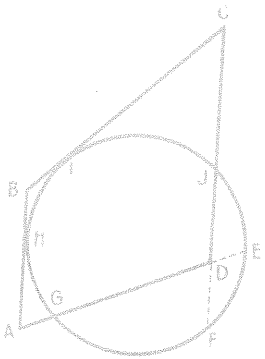


FIG. 2

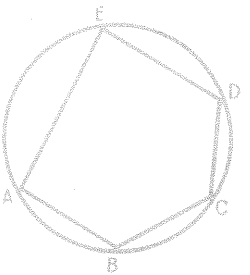


FIG. 3

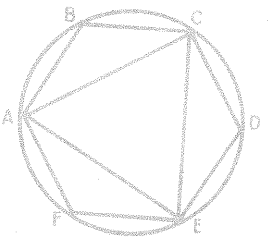


FIG. 4

611. Tenemos un triángulo ABC inscrito en una circunferencia O. Los ángulos A y B miden 60° y 70°, respectivamente. Calcular la medida de los ángulos AOB, BOC y COA.

612. Sobre una circunferencia se han llevado, consecutivamente, los arcos $AB = 60°$, $BC = 120°$ y $CD = 30°$. Calcular: 1.º, los ángulos del cuadrilátero $ABCD$; 2.º, los ángulos formados por las diagonales BD y AC; 3.º, los ángulos formados por las prolongaciones de los lados opuestos del cuadrilátero.

613. Desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan dos secantes que cortan a la circunferencia, la primera en los puntos A y B, y la segunda en C y D. Demostrar que los triángulos PAD y PCB tienen sus ángulos respectivamente iguales.

614. Desde un punto P exterior a una circunferencia, se traza una secante PBC y una tangente PA. Demostrar que los triángulos PAB y PAC tienen sus ángulos respectivamente iguales.

615. Sobre un segmento rectilíneo de 4 cm. como cuerda, construir un arco capaz de un ángulo de 42°.

616. Construir un triángulo ABC del que se conocen la base $BC = 5$ cm., el ángulo $A = 60°$ y 1.º, la altura $AD = 4$ cm.; 2.º, el lado $AB = 4$ cm.

24. Polígonos regulares

193. Polígonos equiángulos, equiláteros y regulares. — *Polígono* EQUIÁNGULO *(equi,* igual), *es el polígono que tiene todos sus ángulos iguales entre sí.*

Polígono EQUILÁTERO *es el polígono que tiene iguales todos sus lados.*

Polígono REGULAR *es el polígono que tiene iguales todos sus lados y todos sus ángulos.*

EJEMPLOS. — El rectángulo es un polígono equiángulo.
El rombo es un polígono equilátero.
El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares.

Todo polígono regular es equilátero y equiángulo. De los polígonos de más de cuatro lados, suelen estudiarse únicamente los que son regulares.

194. Circunferencias inscrita y circunscrita a un polígono regular. — *Llámase* CIRCUNFERENCIA INSCRITA *a un polígono regular, la circunferencia que es tangente a los lados del polígono.*

Del polígono regular se dice que está *circunscrito* a dicha circunferencia tangente (fig. 61).

CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA *a un polígono regular, es la circunferencia que pasa por todos los vértices del polígono.*

Del polígono regular se dice que está *inscrito* en dicha circunferencia (figura 62).

Las circunferencias inscrita y circunscrita a un polígono tienen el mismo centro.

195. Existencia de polígonos regulares. — Los dos teoremas siguientes demuestran la existencia de polígonos regulares.

TEOREMA I. — *Si dividimos una circunferencia en* n *partes iguales, y unimos consecutivamente los puntos de división, el polígono inscrito que resulta es regular.*

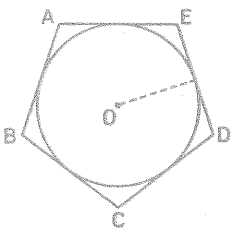


FIG. 61

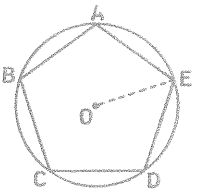


FIG. 62

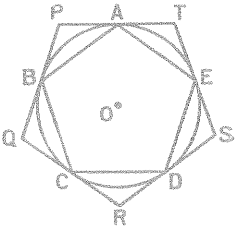


FIG. 63

Supongamos a la circunferencia *O* (fig. 63) dividida en cinco partes iguales, y sean *A, B, C, D* y *E* los puntos de división. Decimos que el polígono *ABCDE* es regular.

En efecto: sus lados son iguales, por ser cuerdas correspondientes a arcos iguales; y sus ángulos también son iguales, porque son ángulos inscritos que abarcan igual número de partes iguales de la circunferencia (en este caso tres).

TEOREMA II. — *Si se divide una circunferencia en* n *partes iguales, y por los puntos de división se trazan tangentes limitadas entre sí, el polígono circunscrito que resulta es también regular.*

Sea el polígono *PQRST* formado por las tangentes *PQ, QR, RS,* etc., trazadas por los puntos *B, C, D,* etc. (fig. 63).

Dicho polígono es equiángulo, porque todos sus ángulos tienen la misma medida, por ser ángulos exteriores que abarcan igual número de partes iguales (cuatro en este caso).

Por otra parte, los triángulos *ABP, BCQ, CDR,* etc., son isósceles e iguales, por tener sus bases iguales y los ángulos adyacentes a ellas también iguales, ya que son semiinscritos que comprenden arcos iguales ($\frac{1}{5}$ de la circunferencia). Por tanto,

$$PB = BQ = QC = CR = RD = DS, \text{ etc.}$$

de donde,

$$PB + BQ = QC + CR = RD + DS, \text{ etc.}$$

o sea,

$$PQ = QR = RS = ST = TP$$

Luego, el polígono *PQRST* es también equilátero, y por tanto, regular.

196. Centro, radio y apotema de un polígono regular. — Se denomina *centro* de un polígono regular al centro O de las circunferencias inscrita y circunscrita (fig. 64).

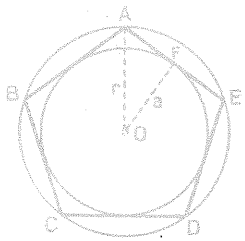


FIG. 64

Radio de un polígono regular es el radio OA de la circunferencia circunscrita (figura 64).

Apotema de un polígono regular es el radio OF de la circunferencia inscrita (figura 64).

La distancia OF del centro O de la circunferencia a uno de los lados del polígono es igual para todos los lados, puesto que las cuerdas iguales equidistan del centro. Es decir, que *a todo polígono regular se le puede inscribir y circunscribir una circunferencia.*

197. Lados del hexágono regular, del cuadrado y del triángulo equilátero. — Vamos a calcular el lado del hexágono regular, del cuadrado y del triángulo equilátero en función del radio de la circunferencia circunscrita.

1) HEXÁGONO REGULAR. — Sea el hexágono regular $ABCDEF$ inscrito en la circunferencia O (fig. 65).

Al unir el centro O con los extremos A y B de un lado del hexágono, se habrá formado el triángulo AOB, que es isósceles, ya que $OA = OB = r$.

Pero el ángulo O de dicho triángulo es un ángulo central, cuya medida será la del arco comprendido entre sus lados, es decir,

$$\frac{360°}{6} = 60°$$

por lo que, debiendo ser iguales los ángulos A y B, su medida será

$$\frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

Luego, el triángulo formado por un lado del hexágono regular y los radios que terminan en sus extremos, es equilátero, y, en consecuencia,

$$\boxed{l_6 = r}$$

Es decir, que

En todo hexágono regular, el lado es igual al radio.

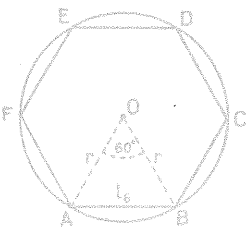


FIG. 65

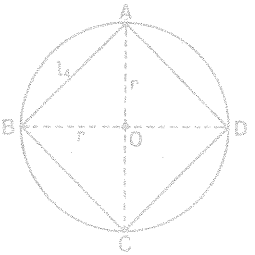


FIG. 66

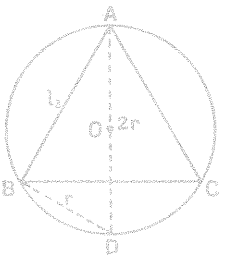


FIG. 67

2) CUADRADO. — En el triángulo rectángulo isósceles AOB (fig. 66), se tiene

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 \quad \text{o bien} \quad l_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, resulta

$$\boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$$

O sea, que

El lado del cuadrado es igual al radio multiplicado por la raíz cuadrada de 2.

3) TRIÁNGULO EQUILÁTERO. — Dividida la circunferencia en seis partes iguales y unidas de dos en dos, obtenemos el triángulo equilátero ABC (figura 67). Su lado, l_3, es cateto del triángulo rectángulo ABD, cuyo otro cateto BD por ser lado del hexágono regular vale r, y cuya hipotenusa por ser diámetro vale $2r$. Luego,

$$l_3^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

de donde,

$$\boxed{l_3 = r\sqrt{3}}$$

Es decir, que

El lado del triángulo equilátero es igual al radio multiplicado por la raíz cuadrada de 3.

198. Ángulo en el centro de un polígono regular.— *Ángulo en el centro* de un polígono regular es el formado por dos radios que terminan en los extremos de un lado. Por ejemplo, el AOB de las figuras 65 y 66.

Los ángulos en el centro de cualquier polígono regular son iguales por interceptar arcos iguales. Ahora bien, un polígono tiene tantos ángulos en el centro como lados, y la suma de todos ellos vale 4 rectos o 360°; luego,

$$\text{Ángulo en el centro} = \frac{360°}{n}$$

siendo n el número de lados del polígono.

199. Ángulo de un polígono regular. — *Ángulo de un polígono* regular es el formado por dos lados consecutivos, como el ABC (figs. 65, 66 y 67).

El valor de un ángulo de un polígono regular depende solamente del número de lados del polígono. Como es un ángulo inscrito en la circunferencia circunscrita, su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados. Ahora bien, sus lados abarcan $n - 2$ divisiones de la circunferencia, y cada división vale $\frac{360°}{n}$; luego,

$$\text{Áng. de un polígono reg.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{n}(n-2) = \frac{180°\,(n-2)}{n}$$

siendo n el número de lados del polígono.

EJEMPLOS. — El ángulo del pentágono regular vale $\frac{180°\,(5-2)}{5} = 108°$

El ángulo del octágono regular vale $\frac{180° \times 6}{8} = 135°$

200. Construcción de polígonos regulares sencillos. — Si dividimos a una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales y trazamos las cuerdas correspondientes a los arcos que han resultado, obtendremos un polígono regular inscrito en la circunferencia. El problema de construir polígonos regulares queda reducido, por consiguiente, al de dividir la circunferencia en tantos arcos iguales como lados haya de tener el polígono que se desea.

201. Problema. — *Dividir una circunferencia en* 4, 8, 16, ..., *partes iguales.* — Para dividir una circunferencia en *cuatro* partes iguales, bastará construir dos diámetros *AB* y *CD*, perpendiculares entre sí (fig. 68).

Si luego trazamos las bisectrices de los ángulos formados por los diámetros perpendiculares, habremos dividido la circunferencia en *ocho* partes iguales; las bisectrices de los nuevos ángulos la dividirán en 16, y procediendo sucesivamente de un modo análogo, podríamos dividirla en 32, 64, ..., etc., partes iguales.

A partir de estas divisiones obtendremos la construcción del *cuadrado*, del *octágono regular* y de los polígonos regulares de 16, de 32, etc. lados.

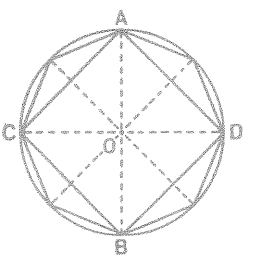


FIG. 68

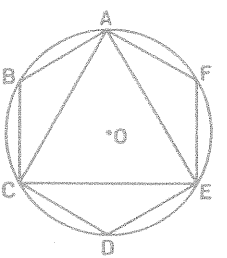


FIG. 69

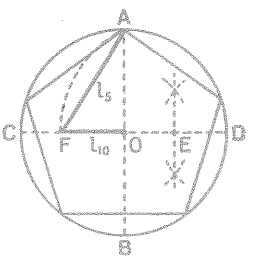


FIG. 70

202. Problema. — *Dividir una circunferencia en* 3, 6, 12, ..., *partes iguales.* — Por ser el lado de todo hexágono regular, igual al radio de la circunferencia circunscrita (197), 1.º), para dividir una circunferencia en *seis* partes iguales, bastará tomar en ella seis veces un arco cuya cuerda sea igual al radio (fig. 69).

Dividida la circunferencia en seis partes, quedará dividida en *tres*, pues basta considerar los arcos que comprenden dos divisiones de las anteriores.

Trazando las bisectrices de los ángulos formados por los radios que pasan por los puntos de división en seis partes, se habrá dividido la circunferencia en 12 partes, y así sucesivamente podríamos dividirla en 24, 48, etcétera.

Con la circunferencia dividida en 3, 6, 12, ..., partes iguales, obtendremos la construcción del *triángulo, hexágono, dodecágono* regulares y de los polígonos regulares de 24, 48, etc. lados.

203. Problema. — *Dividir una circunferencia en* 5, 10, 20, ..., *partes iguales.* — Comenzaremos por trazar dos diámetros AB y CD perpendiculares (figura 70). Haciendo luego centro en E (punto medio del radio OD) y con un radio igual a la distancia EA, describiremos un arco AF que corta al radio OC en el punto F. Hecho esto, la cuerda AF representará el lado del pentágono regular inscrito, y el segmento OF el del decágono.

Tomando en la circunferencia arcos cuyas cuerdas sean iguales a AF, se habrá dividido a aquélla en *cinco* partes iguales; y si tomamos arcos de cuerdas iguales a OF, la circunferencia quedará dividida en diez partes iguales.

Después, como en los casos anteriores, podremos dividir la circunferencia en 20, 40, etc. partes iguales, con sólo trazar bisectrices.

EJERCICIOS

617. Se desea hallar el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia cuyo radio mide: 1.º, 3 m.; 2.º, 5 m.; 3.º, 12'50 cm. (Tómese $\sqrt{2}$ con tres cifras decimales).

618. Calcular le radio de la circunferencia en la que el lado del cuadrado inscrito mide: 1.º, 5'3025 m.; 2.º, 12'8674 dm.; 3.º, 19'089 cm.

619. Hallar el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia cuyo radio mide: 1.º, 4 cm.; 2.º, 9 dm.; 3.º, 15 m. (Tómese $\sqrt{3}$ con tres cifras decimales).

620. Calcular el radio de la circunferencia en la que el lado del triángulo equilátero inscrito mide: 1.º, 3'879 m.; 2.º, 15'0684 cm.; 3.º, 19'918 dm.

621. En una circunferencia de radio igual a 7 m. se inscribe un hexágono regular y un triángulo equilátero. ¿Cuál será la diferencia entre los perímetros de esos dos polígonos?

622. En una circunferencia de 43'96 m. de longitud se inscribe un cuadrado cuya superficie se desea calcular. (Tomar $\pi = 3'14$).

623. Calcular el valor del ángulo en el centro de los siguientes polígonos regulares: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, eneágono, decágono y dodecágono.

624. Hallar el valor del ángulo en el vértice de los polígonos del ejercicio anterior.

625. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo en el centro vale: 90°, 36°, 60°, 10°, 1°?

626. ¿Podríamos formar un polígono regular en el que los radios correspondientes a los extremos de un lado determinasen un ángulo de 12°? ¿Y de 70°?

627. ¿Se podría trazar un polígono regular cuyo ángulo tuviese por medida 135°? ¿Y 130°?

628. Se desea embaldosar una habitación utilizando baldosas de forma de polígonos regulares. ¿Cuántos lados podrán tener esos polígonos, teniendo en cuenta que los polígonos que se emplean cada vez tienen el mismo número de lados?

629. Aplicando el teorema de Pitágoras, calcular la apotema del cuadrado, del hexágono regular y del triángulo equilátero, en función del radio.

630. Dividir una circunferencia de 4 cm. de radio en 12 partes iguales y decir qué polígonos se obtienen al unir esas divisiones: 1.°, de una en una; 2.°, de dos en dos; 3.°, de tres en tres; 4.°, de cuatro en cuatro.

631. Dividir una circunferencia de 35 mm. de radio en 5 partes iguales y trazar el pentágono regular.

632. Construir un decágono regular que tenga 2 cm. de lado.

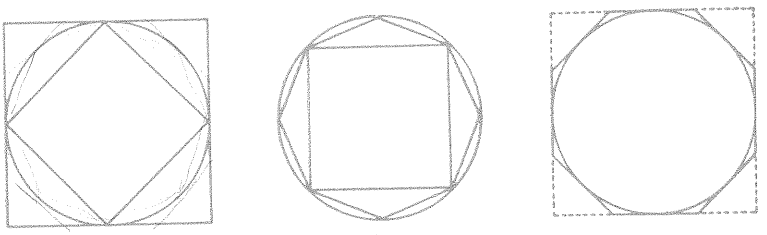
25. Longitud de la circunferencia

204. Perímetro de un polígono regular. — El perímetro de un polígono regular, es decir, la longitud de la línea poligonal que le circunda, es igual al producto de un lado por el número de lados del polígono.

Enunciamos a continuación varias proposiciones cuya verdad la intuición nos hará comprender.

1.ª *Si en una circunferencia inscribimos un polígono regular y circunscribimos otro, el perímetro del primero es menor que el del segundo* (figura 71, *a*).

2.ª *El perímetro de un polígono regular inscrito en una circunferencia es menor que el de otro, también inscrito, de doble número de lados* (figura 71, *b*).



a *b* *c*

FIG. 71

3.ª *El perímetro de un polígono regular circunscrito a una circunferencia es mayor que el de otro, también circunscrito, de doble número de lados* (fig. 71, *c*).

4.ª *Duplicando sucesiva e indefinidamente el número de lados de un polígono regular inscrito o circunscrito, se puede obtener un polígono cuyo lado sea tan pequeño como se desee.*

5.ª *La diferencia entre los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, uno inscrito y otro circunscrito, puede ser menor que cualquier número por pequeño que se considere, con tal que el número de lados sea suficientemente grande.*

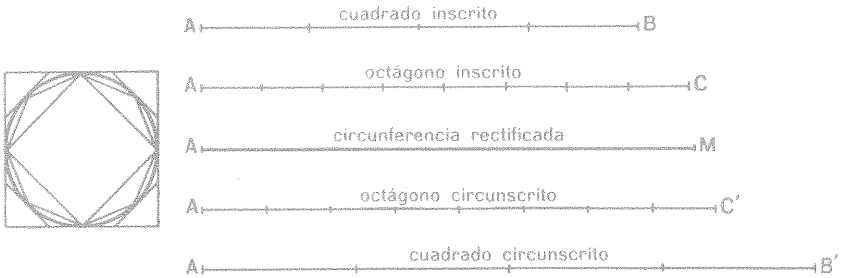


FIG. 72

2.5. **Circunferencia rectificada.** — Sea una circunferencia (fig. 72) e inscribamos en ella un polígono regular, por ejemplo un cuadrado.

Llevando sobre una semirrecta el contorno de dicho polígono, obtendríamos el segmento rectilíneo AB. Duplicando sucesivamente el número de lados del polígono regular inscrito, hallaríamos los segmentos AC, AD, ..., etc., tantos cuantos quisiéramos.

Tracemos ahora el polígono regular circunscrito del mismo número de lados que el inscrito del que partimos, es decir, en nuestro caso tracemos el cuadrado circunscrito. Llevando su contorno sobre una semirrecta, obtendríamos el segmento AB'; y procediendo de igual modo con los polígonos regulares circunscritos que resultan al duplicar sucesivamente el número de lados, hallaríamos los segmentos AC', AD', ..., etc.

Ahora bien, según lo dicho en el párrafo anterior, los segmentos correspondientes a los polígonos inscritos son creciente en el orden en que los obteníamos, mientras que los equivalentes a los perímetros de los polígonos circunscritos son decrecientes. O sea, que

$$\left.\begin{array}{l} AB < AC < AD < \ldots\ldots \\ AB' > AC' > AD' > \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Por otra parte, todo segmento del primer grupo es menor que uno del segundo, y la diferencia entre dos segmentos correspondientes, uno de cada grupo, puede ser tan pequeña como se quiera.

Luego, la intuición nos dice que existirá un segmento rectilíneo, AM, mayor que todos los del primer grupo y menor que todos los del segundo. A este segmento AM es a lo que llamamos *circunferencia rectificada.*

Es decir, que *circunferencia rectificada es un segmento rectilíneo, considerado como límite entre los contornos rectificados de los polígonos*

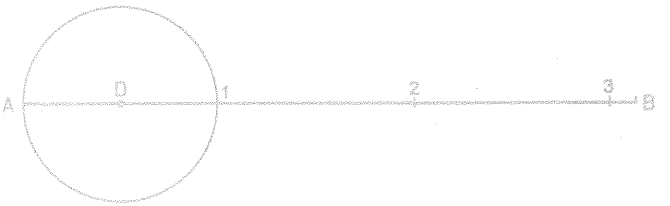


FIG. 73

regulares inscritos y circunscritos, al duplicar sucesiva e indefinidamente el número de sus lados.

206. Razón de la circunferencia a su diámetro. — Rodeando un aro con un hilo flexible, hasta darle una vuelta completa, y cortando luego el hilo sobrante, obtendremos prácticamente (después de extender el hilo) la longitud de la circunferencia rectificada de dicho aro.

Si por este procedimiento, o por otro cualquiera, hallamos la longitud de una circunferencia y medimos luego su diámetro, podremos observar que la medida obtenida para la circunferencia es un poco más de tres veces la del diámetro. Efectuando las medidas con cuidado, veríamos que la circunferencia contiene al diámetro tres veces y queda un trozo que es aproximadamente igual a la séptima parte de dicho diámetro (figura 73). Y si la medición la hiciéramos exactamente, observaríamos que cualquiera que fuera la circunferencia considerada, su longitud dividida por el diámetro da siempre el mismo cociente.

Teniendo esto en cuenta, diremos:

La longitud de la circunferencia y la de su diámetro, están en una relación constante. El número que expresa esa relación se representa por la letra griega π (pi).

Es decir, que, designando por C la longitud de la circunferencia y por $D = 2r$ la del diámetro, podremos escribir:

$$\frac{C}{D} = \pi \quad \text{o bien} \quad \frac{C}{2r} = \pi$$

En estudios superiores de Geometría se demuestra que el número π no es entero ni fraccionario, sino irracional, es decir, que va expresado por un número infinito de cifras decimales, sin formar período.

Hay métodos que permiten obtener un valor muy aproximado del número π, habiéndose llegado a calcularlo con más de 700 cifras decimales exactas.

En los cálculos ordinarios se hace uso, generalmente, de los valores

$$\pi = 3'1416 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\pi} = 0'3183$$

207. Longitud de la circunferencia. — De la razón anterior

$$\frac{C}{2r} = \pi, \quad \text{se deduce que} \quad C = 2\pi r$$

lo cual nos dice que

Para hallar la longitud de una circunferencia, se multiplica 2π por el radio.

EJEMPLO. — ¿Cuál es la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 4 m.? Sustituyendo en $C = 2\pi r$, se tiene: $C = 2 \times 3'1416 \times 4 = 25'1328$ m.

208. Cálculo del radio. — Dividiendo por 2π los dos miembros de la igualdad

$$C = 2\pi r$$

resulta:

$$r = \frac{C}{2\pi} \quad \text{o lo que es igual} \quad r = \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi}$$

resultado que prueba que *el radio de una circunferencia se halla multiplicando la longitud de la semicircunferencia por el recíproco de* π.

EJEMPLO. — ¿Cuál será el radio de una circunferencia que mide 127 metros?

$$r = \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi} = \frac{127}{2} \times 0'3183 = 20'21205 \text{ m.}$$

209. Longitud de un arco de circunferencia.

La longitud de un arco de n grados se obtiene multiplicando $\frac{\pi r}{180}$ por n.

En efecto: existiendo proporcionalidad entre la longitud de los arcos y sus respectivas graduaciones, podemos razonar así:

Longitud de media circunferencia (arco de 180°) $= \pi r$

Longitud de un arco de 1° ..... $= \dfrac{\pi r}{180}$

Longitud de un arco de $n°$ ..... $= \dfrac{\pi r n}{180}$

OBSERVACIÓN. — La medida n del arco puede venir expresada en grados y minutos, o en grados, minutos y segundos. Entonces habrá que reducir el número n a minutos, o a segundos, y sustituir 180 en la fórmula por su correspondiente valor en minutos, o en segundos.

EJEMPLO. — ¿Cuál será la longitud de un arco de 56° 22′ perteneciente a una circunferencia de 27 metros de radio?

Como 56° 22′ equivalen a 3.382′, y 180° = 10.800′, la fórmula anterior se convierte en

$$l = \frac{3'1416 \times 27 \times 3.382}{10.800} = 26'562 \text{ m.}$$

Si el arco estuviera expresado en grados centesimales, el razonamiento sería análogo. En ese caso, diríamos:

A 200 grados centesimales corresponde la longitud πr

A 1 grados centesimal corresponderá la longitud $\dfrac{\pi r}{200}$

A n grados centesimales corresponderá la longitud, $l = \dfrac{\pi r n}{200}$

EJEMPLO. — Hallar la longitud de un arco de $63^g\ 85^m$ perteneciente a una circunferencia de 12 metros de radio.

Aquí no es necesario reducir n a minutos; basta expresarlo en fracción decimal de grados centesimales, dejando luego invariable el 200 de la fórmula.

Así, como $63^g\ 85^m$ equivalen a $63'85^g$, reemplazando en la fórmula, tendremos:

$$l = \frac{3'1416 \times 12 \times 63'85}{200} = 12'035 \text{ m.}$$

* * *

EJERCICIOS

633. Hallar el perímetro del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 38 metros de radio. Id. el del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

634. ¿Cuál será el perímetro de los cuadrados inscrito y circunscrito en una circunferencia de 38 cm. de radio?

635. El perímetro de un cuadrado es igual a 96'152 m. ¿Cuánto medirá el radio de la circunferencia circunscrita a dicho cuadrado? ¿Y el de la circunferencia inscrita?

636. Construir una circunferencia de 35 mm. de radio y rectificarla luego.

637. Calcular la longitud de una circunferencia de 13'50 m. de radio.

638. ¿Qué variación experimenta la longitud de una circunferencia, si el diámetro aumenta en 1 cm.? ¿Y en 3 cm.? ¿Y en 7 cm.?

639. ¿Podremos rodear una columna cilíndrica de 85 cm. de diámetro con una cinta metálica de 2'60 m. de larga?

640. ¿Cuánto mide el radio de una circunferencia cuya longitud es de 63 m.?

641. Para fabricar un disco metálico de 9 m. de circunferencia, ¿qué medida habrá que dar al diámetro?

642. Supuestas dos circunferencias, la primera de radio 7 m. y de 26 m. la segunda, ¿cuál de ellas disminuirá más en longitud, si se reduce la longitud de cada uno de los radios en 3 cm.?

643. La diferencia entre la longitud de una semicircunferencia y su diámetro es de 8'16244 m. Hallar cuánto mide el radio.

644. Se desea hallar la longitud de una correa que une dos poleas de 45 cm. de diámetro, cuyos centros distan entre sí 0'75 m.

645. En la figura 1 se representan cinco circunferencias tangentes, con el centro en la misma recta. Probar que la longitud de la circunferencia exterior es igual a la suma de las longitudes de las cuatro interiores.

646. En la figura 2 se dan tres circunferencias tangentes, con el centro en la misma recta. Probar que la longitud de la circunferencia exterior es igual a la suma de las longitudes de las interiores.

647. La curva representada en la figura 3 se compone de tres semicircunferencias, con el centro situado en la recta *AB*. Probar que la longitud del arco *ACB* es igual a la del arco *ADFEB*.

648. En una circunferencia se halla inscrito un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm. y 15 cm. respectivamente. Calcular la longitud de dicha circunferencia.

649. Entre la longitud de una circunferencia y el perímetro del hexágono inscrito en ella, hay una diferencia de 0'9912 m. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

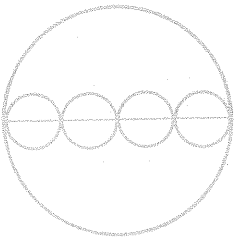


FIG. 1

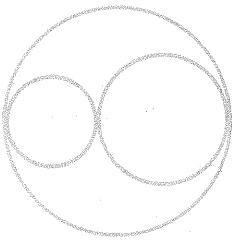


FIG. 2

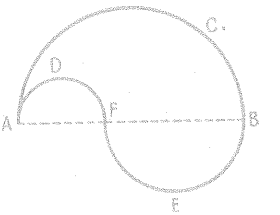


FIG. 3

650. ¿Cuál será la longitud de un arco de 135°, perteneciente a una circunferencia de longitud igual a 144 metros?

651. Hallar la longitud de un arco de 12°, sabiendo que corresponde a una circunferencia de 9 m. de radio.

652. La longitud de un arco de 120° es 78'54 m. ¿Cuál es su radio?

653. ¿Qué radio tiene una circunferencia en la que un arco de 1″ mide 1 centímetro de longitud?

654. Sabiendo que el diámetro de una circunferencia mide 74 mm., ¿cuál será la longitud del arco correspondiente a un ángulo en el centro de 124°?

655. Se tiene una circunferencia de 64 cm. de longitud. ¿Qué longitud tendrá el arco comprendido entre los lados de un ángulo inscrito en dicha circunferencia, sabiendo que la medida de dicho ángulo es 27°?

656. Calcular la longitud de un arco de 18° 24′ 40″, perteneciente a una circunferencia de 20 cm. de radio?

657. Resolver el problema anterior, suponiendo que el arco va expresado en unidades centesimales.

658. Hallar la graduación, en unidades sexagesimales, de un arco de 100 metros de longitud, perteneciente a una circunferencia de radio igual a 50 metros.

659. Resolver el mismo problema, expresando el arco en unidades centesimales.

660. Se desea hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es igual a la de un arco de 124°, trazado con un radio igual a 6 dm.

661. ¿Cuál es, en grados, minutos y segundos sexagesimales, la medida del arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio con que está trazado?

662. Admitiendo que el meridiano terrestre es perfectamente circular y que el metro es la diezmillonésima parte del cuadrante de dicho meridiano, hallar: 1.º, la longitud del radio terrestre; 2.º, la longitud de un arco de un minuto del meridiano terrestre, es decir, de una milla marina.

663. Suponiendo las condiciones del problema anterior, calcúlese la distancia entre Dunkerque y Barcelona, sabiendo que las separa un arco de meridiano de 9° 40′ 12″.

26. Área del círculo

210. Área de un polígono regular.

El área de un polígono regular es igual al semiproducto del perímetro por la apotema.

Consideremos un polígono regular *ABCDEF* (figura 74), y sea l el lado, a la apotema y n el número de lados.

Uniendo los vértices con el centro O del polígono, resultan tantos triángulos iguales como lados hay en el polígono; y como el área de cada uno de ellos es igual al semiproducto del lado del polígono por la apotema, se tiene:

$$\text{Área} = \frac{la}{2} \times n = \frac{la \times n}{2} = \frac{ln \times a}{2}$$

Siendo ln igual al perímetro p, resulta:

$$\text{Área} = \frac{pa}{2}$$

EJEMPLO. — Un hexágono regular cuyo lado mide 13 metros y la apotema, 11'258 metros, tendrá por área

$$A = \frac{pa}{2} = \frac{13 \times 6 \times 11'258}{2} = 439'062 \text{ m}^2$$

211. Área del círculo.

El área del círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio (fig. 75).

En efecto: un círculo se puede considerar como el límite a que tiende un polígono regular inscrito, cuando se duplica sucesiva e indefinidamente el número de lados. En el límite, el área del polígono se confunde con la del círculo, y el perímetro y apotema del polígono toman por valores respectivos las longitudes de la circunferencia y del radio. Según

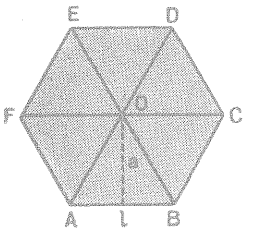


FIG. 74

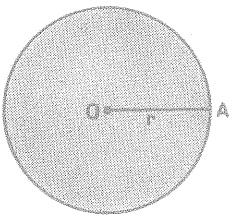


FIG. 75

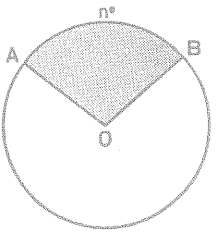


FIG. 76

esto, reemplazando en la fórmula anterior el perímetro p por la circunferencia C y la apotema a por el radio r, obtendremos:

$$\text{Área} = \frac{Cr}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$$

EJEMPLO. — El área de un círculo cuyo radio mide 17 cm., será

$$A = \pi r^2 = 3'1416 \times 17^2 = 907'9224 \text{ cm}^2$$

212. Área del sector circular. — *Se llama sector circular a la parte de círculo limitada por un arco y los radios que pasan por sus extremos* (figura 76).

El área de un sector circular de n grados se obtiene multiplicando $\frac{\pi r^2}{360}$ por n.

En efecto: considerando al círculo como un sector de 360°, y teniendo en cuenta que las áreas de los sectores circulares son proporcionales a sus arcos respectivos, podemos razonar del siguiente modo:

$$\text{Área de un sector de } 360° = \pi r^2$$

$$\text{Área de un sector de } 1° = \frac{\pi r^2}{360}$$

$$\text{Área de un sector de } n° = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

Si el arco viniera expresado en grados centesimales, la fórmula anterior se transforma en esta otra:

$$\text{Área} = \frac{\pi r^2 n}{400}$$

EJEMPLO 1.º — Hallar el área de un sector circular de 146° 52′ 88″ perteneciente a un círculo de 4 dm. de radio.

Como 146° 52′ 88″ equivalen a 528.808″ y 360° = 1.296.000″, sustituyendo en la fórmula, resulta:

$$\text{Área} = \frac{3'1416 \times 4^2 \times 528.808}{1.296.000} = 20'5099 \text{ dm}^2$$

EJEMPLO 2.º — Un círculo tiene 14 cm. de radio. ¿Cuál es el área de un sector de $372^g\ 84^m\ 12^s$?

Como $372^g\ 84^m\ 12^s = 372'8412^g$, tendremos:

$$\text{Área} = \frac{3'1416 \times 14^2 \times 372'8412}{400} = 573'945 \text{ cm}^2$$

213. Otra expresión del área del sector circular.

El área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud del arco base por la del radio.

En efecto: las fórmulas

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} \qquad \text{y} \qquad A = \frac{\pi r^2 n}{400}$$

que expresan el área de un sector circular, se pueden escribir también así:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r n}{180} \times r = \frac{1}{2} l r$$

$$A = \frac{\pi r^2 n}{400} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r n}{200} \times r = \frac{1}{2} l r$$

EJEMPLO. — Hallar el área de un sector circular perteneciente a un círculo de 5 metros de radio y cuyo arco base mide 0'7854 metros.

Según la fórmula anterior, tendremos:

$$A = \tfrac{1}{2} l r = \frac{0'7854 \times 5}{2} = 1'9635 \text{ m}^2$$

214. Área del segmento circular.

— *Denominamos segmento circular a la porción de círculo comprendida entre un arco y su cuerda correspondiente.*

Observando las figuras 77 y 78 podemos ver claramente que el área de un segmento circular es igual a la *diferencia*, o a la *suma*, de las áreas del sector correspondiente al arco del segmento, y del triángulo que tiene por base la cuerda del segmento y por vértice el centro del círculo, según que el arco del segmento considerado sea *menor*, o *mayor*, que media circunferencia.

Efectivamente, según la figura 77, se tiene:

$$\text{Área ACB} = \text{Área sector OACB} - \text{Área triáng. OAB}$$

Y según la figura 78, resulta:

$$\text{Área ACB} = \text{Área sector OACB} + \text{Área triáng. OAB}$$

EJEMPLO. — Hallar el área de un segmento circular de 120° perteneciente a un círculo de 12 m. de radio, sabiendo que la cuerda correspondiente mide 20'78 m. y dista del centro 6 metros.

$$A = \text{área sector} - \text{área triángulo} = \frac{\pi r^2 n}{360} - \frac{b \times h}{2} =$$

$$= \frac{3'1416 \times 12^2 \times 120}{360} - \frac{20'78 \times 6}{2} = 150'78 - 62'34 = 88'44 \text{ m}^2$$

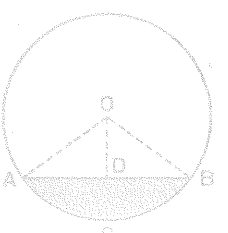


FIG. 77

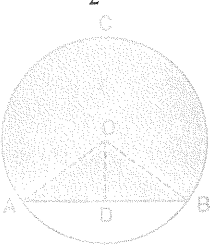


FIG. 78

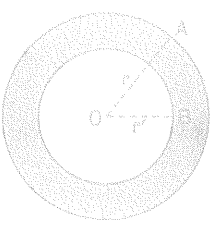


FIG. 79

215. Área de la corona circular. — *Se denomina corona circular a la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas.*

El área de una corona circular es igual a la diferencia entre las áreas de los círculos correspondientes a las circunferencias que la limitan.

En efecto: si del círculo de radio *OA* (figura 79) restamos el de radio *OB*, nos quedará la corona circular. Por tanto, designando por r y r' los radios respectivos, se tiene:

$$\text{Área} = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

EJEMPLO. — Hallar el área de la corona limitada por dos circunferencias cuyos radios miden 12 y 8 dm., respectivamente.

$$A = \pi (r^2 - r'^2) = 3'1416\,(12^2 - 8^2) = 3'1416 \times 80 = 251'33 \text{ dm}^2$$

ADVERTENCIA. — Teniendo en cuenta lo dicho en los párrafos 105 y 106, la fórmula $A = \pi (r^2 - r'^2)$ es equivalente a esta otra $A = \pi (r + r')(r - r')$, ya que $r^2 - r'^2 = (r + r')(r - r')$.

EJERCICIOS

664. Hallar el área de los polígonos regulares cuyo lado y apotema se especifican:

1.º, $l_5 = 3'256$ m.; $a_5 = 2'427$ m.
2.º, $l_6 = 32$ cm.; $a_6 = 27'71$ cm.
3.º, $l_8 = 12'24$ dm.; $a_8 = 14'78$ dm.
4.º, $l_{10} = 31'52$ m.; $a_{10} = 48'50$ m.

665. Hallar el área de un círculo que tiene por diámetro 15 m.

666. Hallar el área de un círculo cuya circunferencia mide 43'9824 m.

667. Calcular el radio de un círculo cuya área es 32'169984 dm^2.

668. ¿Cuál es el área de un círculo de 25 m. de radio? ¿Y el de un sector circular de 15° de amplitud, perteneciente al círculo anterior?

669. Calcular el área de un círculo, sabiendo que el perímetro del hexágono regular que puede inscribirse en él es igual a 78 dm.

670. Hallar el área de un círculo en el que hay inscrito un cuadrado de 9'898 cm. de lado.

671. Un rectángulo cuyas dimensiones son 12 cm. y 5 cm., se halla inscrito en un círculo. ¿Cuál es el área de este círculo?

672. Hallar el área de un sector de 127° 42′, perteneciente a un círculo de 7 centímetros de radio. (Tómese $\pi = 3'14$).

673. Un sector circular de 15'83 m^2 de área, situado en un círculo de 11 m. de radio, ¿qué amplitud tendrá? Dése la solución en las divisiones sexagesimal y centesimal. ($\pi = 3'14$).

674. Hallar el área de la corona circular limitada por dos circunferencias cuyos radios miden 7 dm. y 42 cm., respectivamente.

675. Hallar el radio de un círculo cuya área es igual a la suma de las áreas de tres círculos, que tienen por radios respectivos 8, 12 y 15 m.

676. El radio de una circunferencia mide 0'20 m. Sobre este radio como diámetro se ha trazado otra circunferencia. ¿Cuál será el área de la superficie limitada por las dos circunferencias?

677. El radio menor de una corona circular de 39'27 m^2 de área, mide 1'25 metros. Calcular el otro radio. Tomar $\pi = 3'14$.

678. Calcular el área del segmento circular perteneciente a un círculo de 3 centímetros de radio, sabiendo que la cuerda que lo limita es el lado del cuadrado inscrito en el mismo círculo.

679. Calcular el radio de un sector circular de 450 cm^2 de área, suponiendo que dicho radio y el arco del sector tienen igual longitud.

680. El perímetro de un triángulo equilátero inscrito en un círculo es igual a 30 m. ¿Cuál será el área de ese círculo?

681. De un sector circular se conoce el área, 31'4 m^2, y la longitud del arco, 6'28 m. ¿Cuál será el radio del círculo a que pertenece?

682. El área de un sector es de 14'13 m^2. El radio del círculo a que pertenece, mide 90 dm. Hallar la amplitud de su arco. ($\pi = 3'14$).

683. El área de una corona circular es igual a la de un círculo de 6 cm. de radio. La diferencia de los radios es 2 cm. Calcular dichos radios.

684. Calcular el área de la parte de un círculo de 10 cm. de radio, comprendida entre la circunferencia y el cuadrado inscrito.

685. Calcular el área de la superficie limitada por una circunferencia de 3 metros de radio y los lados del cuadrado circunscrito.

686. El área de un cuadrante de círculo es de 1'57 m^2. ¿Cuál es el área del cuadrado inscrito en dicho círculo? $\pi = 3'14$.

687. En una esquina de un prado cuadrado de 15 m. de lado, hay un buey atado con una cuerda de 120 dm. de larga. Hallar la extensión de terreno que puede comer.

688. Hallar el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas, siendo 13 la suma de sus radios y 7 la diferencia.

689. La longitud del arco de un sector circular de 18 cm. de radio es 15'7 cm. Calcular el número de grados del sector. ($\pi = 3'14$).

690. Los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia miden 22'2 cm. y 29'6 cm. Hallar la longitud de la circunferencia y el área del círculo limitado por ella.

691. El área de un cuadrado es de 576 m^2. Hallar la longitud de la circunferencia circunscrita al cuadrado y el área del círculo que aquélla limita.

692. Se tiene un hexágono regular de 9'2 cm. de lado y 8 cm. de apotema. ¿Cuál será el área de la corona circular obtenida al trazar las circunferencias inscrita y circunscrita a dicho polígono?

693. El área de una corona circular es de 628 dm^2. Siendo el radio de la circunferencia mayor igual a 2 m., ¿cuál será el de la menor? ($\pi = 3'14$)

27. Prisma y pirámide

216. Poliedros. — *Se llama poliedro a la porción de espacio totalmente limitada por polígonos.*

Los polígonos que limitan al poliedro se llaman *caras* del poliedro; los lados de las caras se llaman *aristas; vértices* son los puntos en que concurren tres o más aristas; *diagonales* son las rectas que unen dos vértices no situados en la misma cara.

Superficie de un poliedro es el conjunto de todas sus caras; el número que expresa la medida de la superficie se llama *área* del poliedro.

Atendiendo al número de caras, algunos poliedros reciben nombres especiales; así, se llama *tetraedro* al poliedro de cuatro caras, *pentaedro* al de cinco, *hexaedro* al de seis, *heptaedro* al de siete, *octaedro* al de ocho, *eneaedro* al de nueve, *decaedro* al de diez, *endecaedro* al de once, *dodecaedro* al de doce, *pentadecaedro* al de quince e *icosaedro* al de veinte.

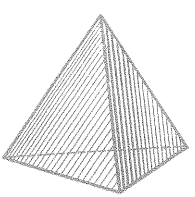


FIG. 80
TETRAEDRO REGULAR

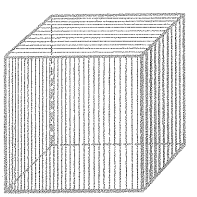


FIG. 81
HEXAEDRO REGULAR O CUBO

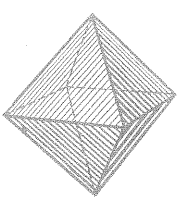


FIG. 82
OCTAEDRO REGULAR

Entre los poliedros más notables están los siguientes: el *tetraedro regular* (fig. 80), cuya superficie está formada por cuatro triángulos equiláteros; el *hexaedro regular* o *cubo* (fig. 81), cuya superficie está compuesta por seis cuadrados iguales; el *octaedro regular* (fig. 82), cuya superficie está formada por ocho triángulos equiláteros iguales.

Poliedros importantes son también los *prismas* y las *pirámides*, de cuyo estudio nos ocupamos a continuación.

217. PRISMA. — *Se da el nombre de prisma al poliedro, dos de cuyas caras, llamadas bases, son polígonos iguales de lados paralelos, y las restantes, denominadas caras laterales. son paralelogramos.*

Las aristas laterales de un prisma pueden ser perpendiculares a las bases y entonces el prisma se dice que es *recto* (fig. 83); las caras laterales son en este caso rectángulos. Cuando las aristas laterales son oblicuas a los planos de las bases, el prisma es *oblicuo* (fig. 84).

Prisma regular es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares (figura 83). En el prisma regular todas las caras laterales son rectángulos iguales.

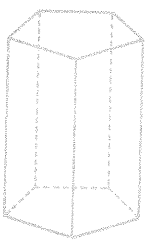


FIG. 83
PRISMA RECTO

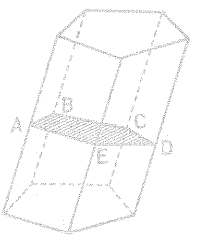


FIG. 84
PRISMA OBLICUO

Altura de un prisma es la perpendicular trazada desde una base a la otra, o a su prolongación. En los prismas rectos, la altura es igual a una arista lateral.

Un prisma recibe el nombre de *triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal,* etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.

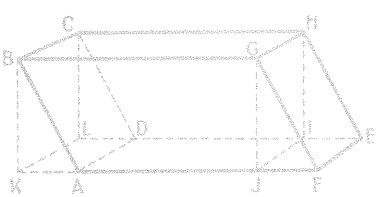


FIG. 85 — PARALELEPÍPEDO

FIG. 86 . ORTOEDRO

Sección recta de un prisma es el polígono que se forma al cortar perpendicularmente un plano a todas las aristas laterales, o a sus prolongaciones. Ejemplos: la *ABCDE* (fig. 84), la *GHIJ* o la *BCLK* (fig. 85). En los prismas rectos, la sección recta es un polígono igual a las bases.

218. Paralelepípedo. — *Recibe el nombre de paralelepípedo todo prisma cuyas bases son paralelogramos; por consiguiente, sus seis caras son paralelogramos* (fig. 85).

El paralelepípedo, como el prisma, puede ser recto y oblicuo.

Paralelepípedo recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases; sus caras laterales son rectángulos.

Ortoedro. o paralelepípedo rectángulo *es el paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos; por tanto, sus seis caras son rectángulos.* Las tres aristas que concurren en un mismo vértice representan sus tres dimensiones (fig. 86).

Cubo. o hexaedro regular, *es el paralelepípedo cuyas caras son seis cuadrados* (fig. 87).

Romboedro es el paralelepípedo cuyas seis caras son rombos (fig. 87).

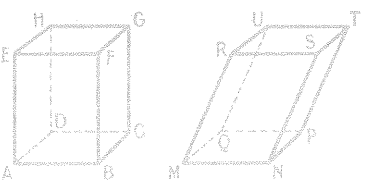


FIG. 87. CUBO Y ROMBOEDRO

219. Desarrollo de la superficie lateral de un prisma. — Supongamos un prisma cuya capa exterior esté formada por una lámina de papel, hojalata, etc. Cortando dicha lámina siguiendo la dirección de las aristas básicas, separaríamos los polígonos de las bases; y al cortar luego por una arista lateral y extender sobre un plano la capa que envuelve a las caras laterales, obtendríamos el llamado *desarrollo plano de la superficie lateral del prisma.*

Si el prisma es *recto* (figura 88), el desarrollo de su superficie lateral es un *rectángulo* que tiene por altura la arista lateral o altura del prisma, y por base, el perímetro de la base del mismo prisma.

Si el prisma es *oblicuo* (figura 89), el desarrollo está formado por una serie de *paralelogramos,* iguales a los de las caras laterales del prisma. De haber trazado previamente la sección normal al prisma, veríamos que dicha sección da lugar en el desarrollo a un segmento perpendicular a todas las aristas laterales, cuya longitud es igual al perímetro de la sección.

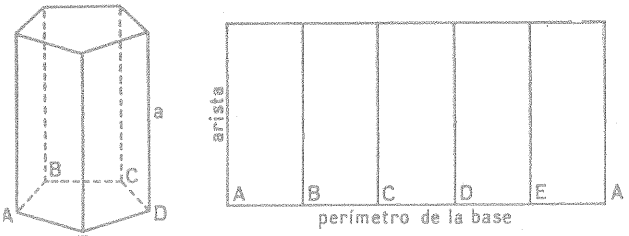


FIG. 88

220. Áreas lateral y total del prisma. — Entendemos por *área lateral* de un prisma, el área de su desarrollo lateral, es decir, la suma de las áreas de las caras laterales. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de las bases.

ÁREA LATERAL:

1.° El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro del polígono de la base por la longitud de una arista lateral.

En efecto: según hemos visto, el desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo que tiene por base el perímetro de la base del prisma, y por altura, la arista lateral o altura del prisma. Como el área del rectángulo es igual al producto de la longitud de la base por la de la altura, tendremos:

$$A_l = p \times a$$

fórmula en la que A_l representa el área lateral, p el perímetro de la base y a la arista lateral.

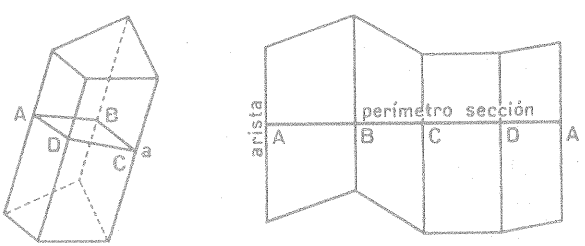


FIG. 89

2.° El área lateral de un prisma oblicuo es igual al perímetro de la sección recta por la longitud de una arista lateral.

En efecto: el área lateral de un prisma oblicuo es la suma de las áreas de los paralelogramos de su desarrollo. En estos paralelogramos (figura 89), podemos con-

siderar como base común a todos ellos a la arista lateral del prisma, y por altura a los distintos lados de la sección recta. Es decir, representando por a a la arista lateral del prisma y por p' al perímetro de la sección recta, tendremos:

$$A_l = a \cdot AB + a \cdot BC + a \cdot CD + a \cdot DA = a\,(AB + BC + CD + DA)$$

y como la suma expresada entre paréntesis representa el perímetro p' de la sección recta, nos queda, en definitiva,

$$A_l = p' \times a$$

ÁREA TOTAL:

Para hallar el área total de un prisma, se suma al área lateral el duplo del área de una de las bases.

Es decir, representando por A_t el área total y por B el área de la base, se tiene:

$$A_t = A_l + 2\,B$$

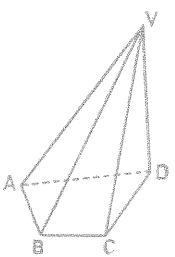


FIG. 90. PIRÁMIDE

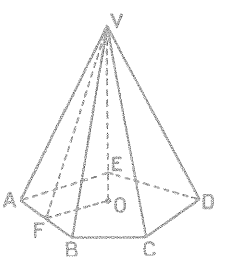


FIG. 91. PIRÁMIDE REGULAR

221. PIRÁMIDE. — *Llámase pirámide a un poliedro, una de cuyas caras es un polígono cualquiera denominado base, y las restantes, llamadas caras laterales, son triángulos con un vértice común, que es el vértice de la pirámide, debiendo estar éste situado fuera del plano de la base.*

En la pirámide $VABCD$ (figura 90), el cuadrilátero $ABCD$ es la base; el punto V, el vértice; los triángulos AVB, BVC, CVD y DVA son las caras laterales; las rectas VA, VB, VC y VD que concurren en el vértice, se llaman *aristas laterales*, y las rectas AB, BC, CD y DA que forman el polígono de la base se denominan *aristas básicas*.

Altura de la pirámide es la perpendicular VO trazada desde el vértice a la base.

Una pirámide recibe el nombre de *triangular, cuadrangular, pentagonal*, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

La pirámide triangular se llama *tetraedro*. Todas sus caras son triángulos y cualquiera de ellas puede servir de base.

222. **Pirámide regular.** — *De una pirámide se dice que es regular cuando su base es un polígono regular, y su altura tiene por pie el centro del polígono de la base.* Ejemplo, la *VABCDE* (fig. 91).

En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y, en consecuencia, las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Apotema de una pirámide regular es la altura *VF* de uno de los triángulos que forman las caras laterales. No hay que confundirla con la apotema *OF* de la base.

El tetraedro regular es una pirámide regular triangular; pero una pirámide regular triangular no siempre es un tetraedro regular.

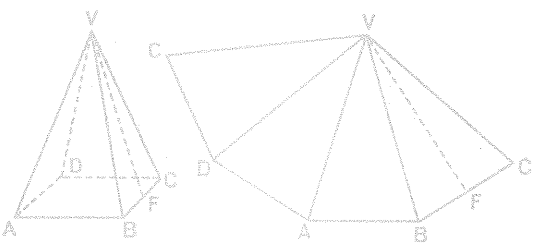


FIG. 92

223. **Desarrollo de la superficie lateral de una pirámide regular.** — Supongamos (como en el caso del prisma) una pirámide cuya capa exterior esté formada por una lámina de papel, hojalata, etc., fácilmente separable del resto. Separando primeramente la base y cortando luego la lámina según la dirección de una arista lateral, obtendríamos, después de extenderla sobre un plano, el *desarrollo de la superficie lateral de la pirámide.*

Tratándose de una pirámide regular (figura 92), el desarrollo se compone de tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene el polígono de la base, teniendo todos ellos por altura la apotema de la pirámide.

224. **Áreas lateral y total de la pirámide regular.** — Se entiende por *área lateral* de la pirámide, el área del desarrollo de su superficie late-

ral, es decir, la suma de las áreas de las caras laterales. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de la base.

ÁREA LATERAL:

El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de la base por la longitud de la apotema de la pirámide.

En efecto: teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo 223 y representando por l la medida del lado del polígono de la base, por n el número de lados de ese polígono, por p su perímetro, y por a la longitud de la apotema de la pirámide, tendremos:

$$A_l = \frac{l \times a}{2} \times n = \frac{ln \times a}{2} = \frac{p \times a}{2}$$

ÁREA TOTAL:

El área total es igual a la suma del área lateral y el área de la base.

Designando por B el área de la base, por a la apotema de la pirámide, por a' la apotema de la base, y por p el perímetro de ésta, tendremos:

$$A_t = A_l + B = \frac{p \times a}{2} + \frac{p \times a'}{2} = \frac{p(a+a')}{2}$$

EJERCICIOS

Hallar el área lateral y total de los prismas rectos de 15 cm. de altura y que tienen por base:

694. Un triángulo de 8 cm. de base, 6 de altura y 26 cm. de perímetro.

695. Un triángulo rectángulo cuyos catetos son de 9 y 12 cm.

696. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13 cm. y uno de los catetos , 12 cm.

697. Un rectángulo de 10 cm. de base y 7 de altura.

698. Un cuadrado de 8 cm. de diagonal.

699. Un triángulo equilátero de 8 cm. de lado.

Hallar el área lateral de los prismas cuyas aristas laterales y perímetros de las secciones rectas son:

700. 1'8 cm. y 54 cm. **701.** 2 dm. y 69 cm. **702.** 84 mm. y 246 mm.

Hallar el área total del cubo que tiene:

703. 7 cm. de lado.

704. 36 cm. de perímetro en cada cara.

705. 12 cm. en la diagonal de las caras.

Hallar la altura de los prismas rectos cuyos perímetros de la base y área lateral son, respectivamente:

706. 70 cm. y 500 cm^2.

707. 12 dm. y 80 dm^2.

708. 17 cm. y 325 mm^2.

709. Hallar la altura de un prisma de 600 mm^2 de área total, cuya base es un rectángulo de 12 mm. de largo y 9 mm. de ancho.

710. ¿Cómo se llama el cubo, una de cuyas caras tiene 4 m. de perímetro?

711. ¿Qué nombre recibe el cubo cuya superficie total es igual a 6 dm^2?

712. ¿Cuál es el área total de un ortoedro cuyas dimensiones son 3 dm., 11 cm. y 15 cm.?

713. Se desea cubrir el fondo y las paredes de un depósito que tiene la forma de cubo con baldosas cuadradas de 0'2 m. de lado. ¿Cuántas baldosas serán necesarias si la arista del depósito mide 3 m.?

714. ¿Cuánto costará pintar las paredes y el techo de un salón de 12 m. de largo por 5'2 m. de ancho y 4'5 m. de alto, en el cual hay 4 ventanas de 2'9 m. por 1'5 m. y 3 puertas de 3'7 m. por 2'2 m., si se paga a 40 ptas. el metro cuadrado?

715. Por tallar las seis caras de una piedra que tiene forma de ortoedro y cuyas aristas miden 1'8 m., 7 dm. y 150 cm., respectivamente, se pagaron 250'50 pesetas. ¿A cómo resultó la talla del metro cuadrado?

716. Hallar el área lateral de un prisma pentagonal regular cuya arista básica mide 5 dm. y la arista lateral 1'2 metros.

717. ¿Cuál será el área lateral de un depósito que tiene forma de prisma hexagonal regular, sabiendo que su arista básica mide 0'90 m. y 1'6 m. la altura?

718. Un prisma octogonal regular tiene 7'68 m^2 de área lateral. ¿Cuánto medirá la arista básica, si la medida de la altura es de 1'20 m.?

719. ¿Cuántas caras laterales tiene un prisma regular de 3'5 m. de altura, 1'2 dm. de arista básica y 3'78 m^2 de área lateral?

720. Hallar el área lateral de una pirámide triangular regular cuya apotema mide 3'4 m. y la arista básica 1'6 m.

721. Hallar el área lateral y total de una pirámide cuadrangular regular cuya apotema mide 8'3 m. y 27 dm. la arista básica.

722. La base de una pirámide regular es un dodecágono regular de 3'21 dm. de lado y 6 dm. de apotema. Hallar el área lateral y total de dicha pirámide, sabiendo que su apotema mide 14 dm

723. ¿Cuántos lados tiene el polígono de la base de una pirámide regular cuya apotema mide 43 cm., 8 cm. la arista básica y 1.204 cm^2 el área lateral?

724. Una pirámide octogonal regular cuya arista básica mide 1'6 m., tiene 21'76 m^2 de área. ¿Cuál es la longitud de su apotema?

28. Cilindro, cono y esfera

225. Cilindro de revolución. — *Cilindro de revolución es el cuerpo engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados como eje. Está limitado por dos círculos iguales, llamados bases, y por una superficie curva, que recibe el nombre de superficie cilíndrica.*

Supongamos un rectángulo $AOO'B$ (figura 93) que gira alrededor de uno de sus lados OO'. Este rectángulo engendra en su rotación (giro o revolución) un cuerpo al que llamamos *cilindro de revolución.*

El lado AB, que engendra la superficie lateral del cilindro, recibe el nombre de *generatriz* o *lado* del cilindro. La recta fija OO' se denomina *eje.* Los lados OA y $O'B$ engendran dos círculos iguales y paralelos, que son las *bases* del cilindro.

Altura del cilindro es la distancia entre las dos bases. La altura es igual a la generatriz.

Un lápiz redondo, una columna, un rodillo, etc. son ejemplos de cilindros.

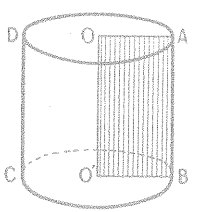


FIG. 93

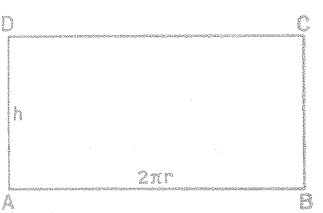


FIG. 94

226. Desarrollo de la superficie lateral del cilindro de revolución. — Si suponemos formada la superficie curva de un cilindro de revolución por una capa de papel o cartulina, y la cortamos siguiendo una generatriz, podremos obtener, después de extenderla sobre un plano, el llamado *desarrollo de la superficie lateral.*

Este desarrollo (figura 94) origina un rectángulo cuya base AB es igual a la longitud de la circunferencia de una de las bases del cilindro, y cuya altura DA equivale a la altura h del cilindro.

227. **Áreas lateral y total del cilindro de revolución.** — Entendemos por *área lateral* del cilindro de revolución, el área del desarrollo de su superficie lateral. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de las bases.

ÁREA LATERAL:

El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la longitud de la circunferencia de la base, por la longitud de la altura.

En efecto: siendo el desarrollo de la superficie lateral un rectángulo y teniendo en cuenta qué son la base y la altura de ese rectángulo, tendremos:

$$A_l = 2\pi r \times h$$

fórmula en la que A_l representa el área lateral, r la medida del radio de la base y h la de la altura.

OBSERVACIÓN. — Dividiendo los dos miembros de la fórmula anterior, sucesivamente por $2\pi h$ y $2\pi r$, se obtiene:

$$r = \frac{A_l}{2\pi h} = \frac{A_l}{2h} \times \frac{1}{\pi}; \qquad h = \frac{A_l}{2\pi r} = \frac{A_l}{2r} \times \frac{1}{\pi}$$

fórmulas que sirven para resolver estos dos problemas:

1.° *Conociendo el área lateral y la altura de un cilindro de revolución, hallar el radio de la base.*

2.° *Conociendo el área lateral y el radio de la base de un cilindro de revolución, calcular la longitud de la altura.*

ÁREA TOTAL:

Para hallar el área total, se suma al área lateral el duplo del área de uno de los círculos que forman las bases.

Es decir, designando por A_t el área total, tendremos:

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$$

228. **Cono de revolución.** — *Cono de revolución es el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos como*

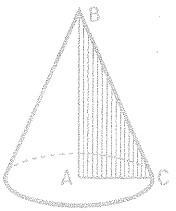


FIG. 95

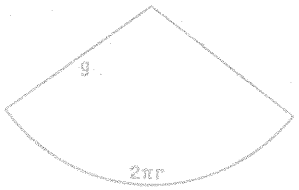


FIG. 96

eje. Está limitado por un círculo, llamado base, y por una superficie curva, denominada superficie cónica.

Supongamos un triángulo rectángulo *ABC* (figura 95) que gira alrededor de uno de sus catetos *AB*. Este triángulo engendra en su rotación (giro o revolución) un cuerpo al que llamamos *cono de revolución.*

La hipotenusa *BC*, que engendra la superficie lateral del cono, recibe el nombre de *generatriz* o *lado* del cono. El cateto fijo *AB* se denomina *eje*, y el móvil, *AC*, engendra un círculo llamado *base* del cono.

Vértice del cono es el vértice del triángulo generador. *Altura* del cono es la distancia del vértice a la base.

229. Desarrollo de la superficie lateral del cono de revolución. — Si cortamos la superficie lateral del cono según una generatriz y la extendemos sobre un plano, tendremos el *desarrollo de la superficie lateral.*

Este desarrollo (figura 96) da lugar a un sector circular cuyo radio es igual a la generatriz del cono, y cuyo arco base equivale a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

230. Áreas lateral y total del cono. — Por *área lateral* del cono de revolución entendemos el área del desarrollo de su superficie lateral. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de la base.

ÁREA LATERAL:

El área lateral de un cono de revolución es igual al semiproducto de la longitud de la circunferencia de la base, por la longitud de la generatriz o lado.

En efecto: siendo el desarrollo de la superficie lateral un sector circular y teniendo en cuenta a qué es igual el arco base y el radio de ese sector, podremos escribir (núm. 213):

$$A_l = \frac{2\pi r \times g}{2} = \pi r g$$

fórmula en la que r representa la medida del radio de la base del cono y g la de la generatriz.

OBSERVACIÓN. — De la fórmula anterior se deducen estas otras:

$$r = \frac{A_l}{\pi g} = \frac{A_l}{g} \times \frac{1}{\pi}; \qquad g = \frac{A_l}{\pi r} = \frac{A_l}{r} \times \frac{1}{\pi}$$

las cuales nos permiten resolver dos clases de problemas:

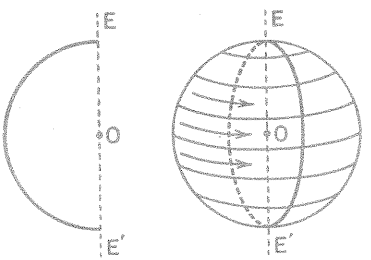


FIG. 97

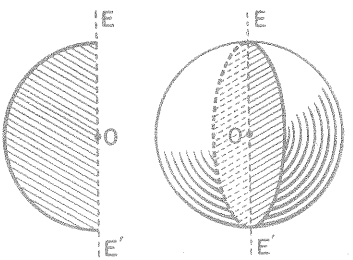


FIG. 98

1.º *Conociendo el área lateral y la generatriz de un cono de revolución, hallar el radio de la base.*

2.º *Conociendo el área lateral y el radio de la base de un cono de revolución, calcular la generatriz.*

ÁREA TOTAL:

El área total de un cono de revolución se halla sumando al área lateral el área del círculo de la base.

O sea, designando por A_t el área total, tendremos:

$$A_t = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

231. Superficie esférica y esfera. — *Se llama* SUPERFICIE ESFÉRICA *a la superficie de revolución engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor del diámetro que pasa por sus extremos* (fig. 97).

Como en esta revolución, los puntos de la semicircunferencia siempre equidistan del centro, resulta que *los puntos de una superficie esférica equidistan de uno interior llamado centro.* Esta propiedad es la que caracteriza a la superficie esférica.

ESFERA *es la porción de espacio limitada por la superficie esférica.* Asimismo, podemos definir a la esfera diciendo que *es el cuerpo o sólido geométrico engendrado por un semicírculo que gira alrededor del diámetro que lo limita* (fig. 98).

Radio de una superficie esférica, o de una esfera, es el segmento rectilíneo que une el centro con un punto cualquiera de la superficie esférica. Por definición, *todos los radios son iguales.*

Diámetro de una superficie esférica, o de una esfera, es el segmento rectilíneo que, pasando por el centro, une dos puntos de la superficie esférica. Como cada diámetro se compone de dos radios, *todos los diámetros son iguales.*

Si se corta una esfera por un plano, la sección producida es un círculo. Cuanto más próximo al centro se halle el plano que corta a la esfera, mayor es el círculo obtenido, y es *máximo* cuando el plano pasa por el centro (figura 98). Todos los círculos máximos son iguales entre sí, pues tienen por radio el radio de la esfera.

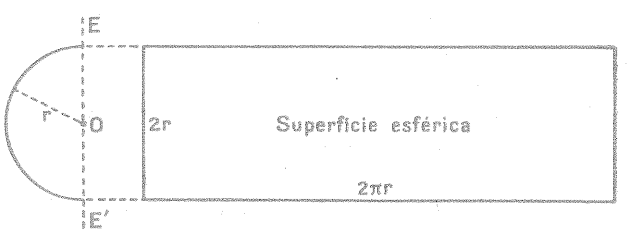


FIG. 99

232. Área de la superficie esférica. — En otro curso de Geometría se demostrará que el área de la superficie engendrada por una semicircunferencia de radio *r*, al girar alrededor del diámetro *EE'* que pasa por

sus extremos, es igual al área de un rectángulo que tiene por base la longitud de la circunferencia de radio r, y por altura, el diámetro $2r$ de esa misma circunferencia (fig. 99).

Ahora bien: según hemos dicho en el párrafo anterior, la superficie engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor del diámetro que pasa por sus extremos, es precisamente la superficie esférica. Luego, si designamos por r el radio de dicha superficie, tendremos:

$$\text{Área superficie esférica} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

Y si observamos que πr^2 representa el área de un círculo máximo en la esfera de radio r, podemos también enunciar:

El área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo de la esfera.

EJERCICIOS

NOTA. — *En los ejercicios de esta lección, tómese siempre* $\pi = 3'14$ *y* $\frac{1}{\pi} = 0'32$. *Adviértase a los alumnos la ventaja que hay en multiplicar por el recíproco de* π, *en lugar de dividir por* π.

725. Hallar las áreas lateral y total de un cilindro de revolución en el que la circunferencia de la base y la altura miden, respectivamente:

a) 9 m. y 5 m. *b)* 34 cm. y 2 dm. *c)* 96 mm. y 74 mm.

726. Calcular las áreas lateral y total de un cilindro de revolución en el que el radio de la base y la altura miden, respectivamente:

a) 2'7 dm. y 34 cm. *b)* 76 cm. y 92 cm. *c)* 56 mm. y 64 mm.

727. Calcular la altura de un cilindro de revolución cuya área lateral y longitud de la circunferencia de la base son, respectivamente:

a) 150 cm^2 y 28 cm. *b)* 200 cm^2 y 40 cm. *c)* 8'25 dm^2 y 968 mm.

728. Calcular la altura de un cilindro de revolución cuya área lateral y radio de la base son, respectivamente:

a) 46 cm^2 y 30 mm. *b)* 2 dm^2 y 5 cm. *c)* 35 cm^2 y 68 mm.

729. Calcular el radio del cilindro de revolución cuya área lateral y altura son, respectivamente:

a) 364 cm^2 y 18 cm. *b)* 8 dm^2 y 5 cm. *c)* 214 cm^2 y 54 mm

730. Un rectángulo cuyas dimensiones son 24 cm. y 18 cm., puede ser el desarrollo de las superficies laterales de dos cilindros de revolución. Hállense las áreas totales de dichos cilindros.

731. Calcular las áreas lateral y total de un cono de revolución en el que la circunferencia de la base y la generatriz miden, respectivamente:

a) 10'5 m. y 6'5 m. *b)* 4'80 cm. y 2'5 cm. *c)* 116 mm. y 65 mm.

732. Calcular las áreas lateral y total de un cono de revolución en el que el radio de la base y la generatriz miden, respectivamente:

a) 1'60 m. y 2'25 m. *b)* 5'40 dm. y 8'9 dm. *c)* 4'45 cm. y 6'25 cm.

733. Hallar la generatriz de un cono de revolución cuya área lateral y radio de la circunferencia de la base son, respectivamente:

a) 7'25 dm^2 y 0'4 dm. *b)* 154 cm^2 y 6 cm. *c)* 95 mm^2 y 4 mm.

734. Hallar el radio de la base de un cono de revolución cuya área lateral y generatriz son, respectivamente:

a) 78 cm^2 y 6'2 cm. *b)* 163 cm^2 y 9'4 cm. *c)* 932 mm^2 y 7 mm.

735. Calcular el área de una superficie esférica cuyo radio mide:

a) 3 m. *b)* 27 dm. *c)* 0'46 m. *d)* 6.500 Km.

736. Calcular el radio de una superficie esférica cuya área es:

a) 5'27 m^2 *b)* 12'54 dm^2 *c)* 834 cm^2 *d)* 6.726 mm^2

737. Calcular la tela necesaria para fabricar un globo esférico que tenga 10 metros de diámetro.

738. La longitud de la circunferencia de un círculo máximo en una esfera es 1.784 cm. Calcular el área de la superficie esférica.

739. Se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos miden, respectivamente, 20 cm. y 21 cm. ¿Qué diferencia hay entre las áreas laterales de los dos conos que se obtienen al hacer girar el triángulo en cuestión alrededor de cada uno de los catetos?

29. Volúmenes

233. Noción de volumen. — *Llamamos volumen de un cuerpo a la medida del espacio que ocupa.*

Para establecer dicha medida, comparamos el espacio que ocupa un cuerpo con el espacio ocupado por otro cuerpo, tomado como unidad. Muchas veces el cuerpo que se quiere medir no contiene un número exacto de veces a la unidad y entonces se sustituye ésta por una de sus partes alícuotas.

La unidad más usada para medir volúmenes es el *metro cúbico* (m^3), que es un cubo de 1 m. de arista. No suelen usarse unidades mayores que el metro cúbico. Para facilitar la medida de volúmenes más pequeños que el metro cúbico, se emplean el *decímetro cúbico* (dm^3), *el centímetro cúbico* (cm^3) *y el milímetro cúbico* (mm^3), que tiene respectivamente 1 dm., 1 cm. y 1 mm. de arista.

Cada unidad de volumen equivale a 1.000 unidades de la inmediata inferior, y es 1 milésima de la unidad inmediata superior. Es decir, que las unidades de volumen varían de 1.000 en 1.000.

Dos cuerpos se dice que son *equivalentes*, o que tienen la misma extensión, cuando tienen igual volumen sin tener la misma forma.

Así, dos pilas formadas con el mismo número de baldosas, consideradas como figuras geométricas, diremos que son equivalentes, aunque su forma sea distinta, ya que están constituídas por el mismo número de partes idénticas.

De dos vasijas que pueden contener la misma cantidad de líquido, decimos asimismo que tienen la misma extensión (llamada en este caso *capacidad*), o que son cuerpos equivalentes.

234. Medición de volúmenes. — Así como las áreas de las superficies no las hemos obtenido directamente, es decir, llevando la unidad cuadrada, tampoco el volumen de un cuerpo se obtiene directamente, o sea, viendo cuántos cubos iguales a la unidad contiene. Esto sería imposible cuando se tratase de un cuerpo que no estuviese hueco.

La Geometría proporciona reglas que permiten hallar el volumen de un cuerpo geométrico cuando se conocen las medidas de algunos de sus elementos: *un área y una longitud,* o bien *tres longitudes.*

Veamos algunas de esas reglas.

235. Volumen del ortoedro.

El volumen de un ortoedro es igual al producto del área de la base por la altura, o lo que es igual, al producto de sus tres dimensiones.

En efecto: sea un ortoedro AB (figura 100) cuyas aristas concurrentes en un vértice miden, respectivamente, 5 cm., 4 cm. y 3 cm. El área de su base será $5 \times 4 = 20$ cm^2. Sobre cada uno de estos cm^2 se puede colocar 1 cm^3, como el MN, obteniéndose una capa de 1 cm. de altura, formada por 20 cm^3 (5 filas de a 4 cm^3). Para completar el ortoedro RS, igual al AB, son necesarias 3 de esas capas; por tanto, su volumen será

$$20 \text{ cm}^3 \times 3 = 60 \text{ cm}^3 \quad \text{o lo que es igual} \quad 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$$

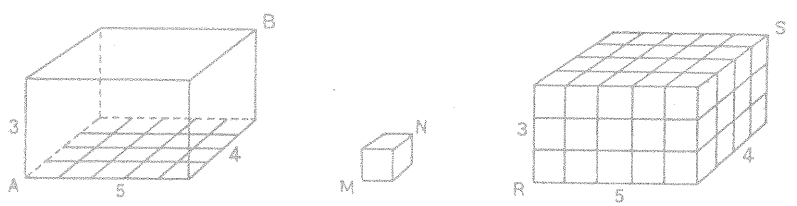


FIG. 100

FÓRMULA. — Designando por B el área de la base, por h la altura y por V el volumen del ortoedro, tendremos

$$V = B \times h, \quad \text{de donde} \quad B = \frac{V}{h} \quad \text{y} \quad h = \frac{V}{B}$$

VOLUMEN DEL CUBO. — El cubo es un ortoedro cuyas tres dimensiones son iguales. Designando por a a la longitud de la arista de un cubo y por V al volumen, se tendrá:

$$V = a \times a \times a = a^3$$

Es decir, que

El volumen de un cubo es igual a la tercera potencia de la longitud de su arista.

236. Volumen del prisma recto. — En cuarto curso demostraremos que

El volumen de un prisma recto es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura.

Como vemos, esta regla coincide con la enunciada anteriormente para hallar el volumen del ortoedro. En efecto: se puede comprobar experimentalmente que el volumen de un prisma es igual al volumen de un ortoedro que tenga la misma altura que él y cuya base sea equivalente a la del prisma. Bastará para ello construir, con cartón o cartulina, un prisma y un ortoedro que posean las condiciones indicadas, y viendo que ambos pueden contener igual cantidad de arena fina.

FÓRMULA. — Designando por V el volumen de un prisma, por B el área de la base y por h la altura (que es como sabemos igual a una arista lateral cualquiera), tendremos:

$$V = B \times h \quad \text{de donde} \quad B = \frac{V}{h} \quad \text{y} \quad h = \frac{V}{B}$$

EJEMPLO. — Hallar el volumen de un prisma recto cuya base es un triángulo de 2'1 dm. de base y 1'3 dm. de altura, siendo 3'2 dm. la medida de la arista lateral.

$$\text{Área de la base} = \frac{b \times h}{2} = \frac{2'1 \times 1'3}{2} = 1'365 \text{ dm}^2$$

$$\text{Volumen} = B \times h = 1'365 \times 3'2 = 4'368 \text{ dm}^3$$

237. Volumen del cilindro de revolución. — La regla para hallar el volumen del cilindro es igual a la dada para el prisma, es decir, que

El volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura.

FÓRMULA. — Designando por V el volumen de un cilindro, por h su altura y por r el radio de la base, tendremos:

$$V = \pi r^2 \times h$$

Dividiendo los dos miembros de esta fórmula, sucesivamente, por h, πr^2 y πh, resulta:

$$\pi r^2 = \frac{V}{h}; \qquad h = \frac{V}{r^2} \times \frac{1}{\pi}; \qquad r^2 = \frac{V}{h} \times \frac{1}{\pi}; \qquad r = \sqrt{\frac{V}{h} \times \frac{1}{\pi}}$$

fórmulas que nos permiten hallar, respectivamente, el área de la base, la altura y el radio de la base de un cilindro.

238. **Volumen de la pirámide.**

El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la longitud de la altura.

Según esto, el volumen de una pirámide será la tercera parte del volumen de un prisma que tenga igual base e igual altura que aquélla. Puede probarse experimentalmente (fig. 101), llenando de arena fina una pirámide de cartón; para llenar el prisma, habrá que verter en él tres veces la pirámide llena de arena fina.

FÓRMULA. — Si V representa el volumen, B el área de la base y h la altura de una pirámide, tendremos:

$$V = \frac{B \times h}{3} \quad \text{de donde} \quad B = \frac{3V}{h} \quad \text{y} \quad h = \frac{3V}{B}$$

239. **Volumen del cono de revolución.** — El volumen de un cono de revolución se halla aplicando una regla análoga a la dada para el volumen de la pirámide, es decir:

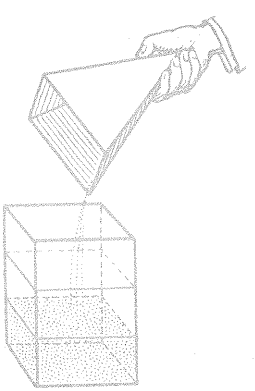


FIG. 101

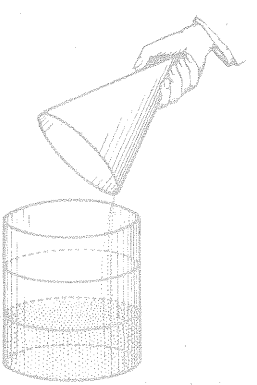


FIG. 102

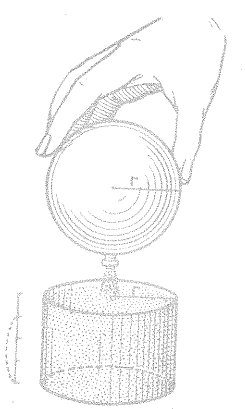


FIG. 103

El volumen de un cono de revolución es igual a la tercera parte del área de la base por la longitud de la altura.

Consecuencia de esta regla y de la dada para el volumen del cilindro, tendremos que, dados un cilindro y un cono con igual base e igual altura, el volumen del cono es la tercera parte que el del cilindro. Véase la comprobación experimental en la figura 102.

FÓRMULA. — Designando por V el volumen de un cono, por h la altura y por r el radio de la base, tendremos:

$$V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

Multiplicando primero por 3 a los dos miembros de esta fórmula, y dividiendo luego, sucesivamente, por h, πr^2 y πh, resulta:

$$\pi r^2 = \frac{3V}{h}; \qquad h = \frac{3V}{r^2} \times \frac{1}{\pi}; \qquad r^2 = \frac{3V}{h} \times \frac{1}{\pi}; \qquad r = \sqrt{\frac{3V}{h} \times \frac{1}{\pi}}$$

fórmulas que emplearemos para hallar el área de la base, la altura y el radio de la base de un cono, respectivamente.

240. Volumen de la esfera. — En Geometría se demuestra (lo veremos en cuarto curso) que

El volumen de la esfera es igual a la tercera parte del producto del área de la superficie esférica por el radio, o lo que es igual, a cuatro tercios del producto de π por el cubo del radio.

FÓRMULA. — Si designamos por V el volumen de la esfera y por r el radio de la misma, tendremos:

$$V = \frac{4\pi r^2 \times r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para comprobar experimentalmente la regla anterior, podríamos llenar de arena una esfera metálica que esté hueca, y derramar luego el contenido sobre un cilindro de cartón cuya base tenga igual radio que la esfera y cuya altura sea igual a los $\frac{4}{3}$ de dicho radio. Veríamos que ambos, la esfera y el cilindro, son equivalentes (fig. 103).

NOTA. — *Cuando hayan de emplearse* π *y su recíproco, tómense, respectivamente, los valores* 3'14 *y* 0'32.

740. Calcular el volumen de un ortoedro cuyas tres dimensiones son:
a) 8 cm., 7 cm., 6 cm.; *b)* 0'34 m., 25 dm., 149 cm.; *c)* 0'7 dm., 6 cm., 43 mm.

741. Calcular el volumen de un cubo que tiene:
a) 4'5 cm. de arista; *b)* 142 mm. de perímetro en cada cara.

742. Hallar el volumen de un prisma recto de 10 cm. de altura y cuya base es:
a) Un triángulo de 12 cm. de base y 9 de altura;
b) Un paralelogramo de 7 cm. de base y 5 cm. de altura;
c) Un rombo cuyas diagonales miden 14 cm. y 9 cm..

743. Hallar el área de la base de un prisma cuyo volumen y altura son:
a) 400 cm^3 y 8 cm.; *b)* 6.572 cm^3 y 18 cm.; *c)* 37 dm^3 y 3 dm.

744. Calcular el volumen de un cilindro de revolución cuya base y altura miden:
a) 312 cm^2 y 11 cm.. *b* 215 dm^2 y 8 dm.; *c)* 752 mm^2 y 8 cm.

745. Calcular el área de la base de un cilindro de revolución cuyo volumen y altura son:
a) 48 cm^3 y 7 cm.; *b)* 128 mm^3 y 9 mm.; *c)* 523 mm^3 y 3'2 cm.

746. Calcular la altura de un cilindro de revolución cuyo volumen y área de la base son:
a) 565 mm^3 y 83 mm^2; *b)* 24 cm^3 y 4'7 cm^2; *c)* 82 dm^3 y 9 dm^2.

747. Calcular el volumen de una pirámide cuya altura y área de la base son:
a) 10 cm. y 30 cm^2; *b)* 14 dm. y 42 dm^2; *c)* 7 m. y 16 m^2.

748. Calcular el área de la base de una pirámide cuyo volumen y altura son:
a) 350 cm^3 y 12 cm.; *b)* 0'243 dm^3 y 1'1 dm.; *c)* 845 m^3 y 18 m.

749. Calcular la altura de la pirámide cuyo volumen y área de la base son:
a) 400 cm^3 y 90 cm^2; *b)* 342 m^3 y 75 m^2; *c)* 0'749 dm^3 y 1'40 dm^2.

750. Calcular el volumen de un cono de revolución cuya altura y área de la base son:
a) 5'3 m. y 10'5 m^2; *b)* 10'5 dm. y 22 dm^2; *c)* 7'8 cm. y 9'6 cm^2.

751. Calcular el volumen de un cono de revolución cuya altura y radio de la base miden:
a) 4 cm. y 3 cm.; *b)* 9'8 m. y 4'3 m.; *c)* 10'5 dm. y 6'2 dm.

752. Calcular la altura de un cono de revolución cuyo volumen y radio son:
a) 46 cm^3 y 3 cm.; *b)* 180 m^3 y 5 m.; *c)* 582 dm^3 y 7 dm.

753. Calcular el radio de un cono de revolución cuyo volumen y altura son:
a) 38 cm^3 y 4 cm.; *b)* 175 dm^3 y 7 dm.; *c)* 622 cm^3 y 12 cm.

754. Hallar el volumen de una esfera cuyo radio mide:
a) 4'62 dm.; *b)* 46 cm.; *c)* 74 mm.

755. Hallar el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima tiene de longitud:
a) 15 m.; *b)* 74 dm.; *c)* 0'86 m.; *d)* 0'094 m.

756. Calcular el volumen de una esfera en la que el área de su superficie es:
a) 12 m^2; *b)* 18 dm^2; *c)* 0'46 dm^2; *d)* 88 mm^2.

757. Un depósito de agua de 1'50 m. de largo, 0'90 m. de ancho y 0'75 m. de alto, está lleno hasta los $\frac{3}{4}$. ¿Cuántos litros de agua contiene?

758. ¿Cuántas gomas de borrar de 4, por 3, por 0'50 cm., caben en una caja de 12, por 9, por 4 cm.?

759. Un depósito tiene 3'50 m. de largo, 0'90 m. de ancho y 0'80 m. de alto. Se echan en él 16 Hl. de agua. ¿Cuántos litros faltan para que se llene el depósito?

760. ¿Cuántos litros de agua hay que sacar de un depósito de 7'25 m. de largo y 4'50 de ancho para que el nivel descienda 1 m.?

761. ¿Cuántos m^3 de tierra hay que extraer para abrir un túnel, que es un semicilindro de 100 m. de largo, siendo su radio de 3 m.?

762. Hallar el diámetro interior de una vasija cilíndrica que tiene 20 cm. de altura y cabe 2 litros de agua.

763. Una torre cilíndrica de 20 m. de circunferencia está rodeada por un estanque circular de 2 m. de ancho y 1'50 m. de profundo. Calcular el volumen del agua que cabe en el estanque.

764. La gran pirámide de Egipto tiene 146 m. de altura, y su base es un cuadrado de 233 m. de lado. ¿Cuál es su volumen?

765. Un prisma tiene 80 cm^2 de base y 11 cm. de altura. Calcular la altura de la pirámide regular de igual volumen, que tenga la misma base que el prisma.

766. Una pirámide regular de plomo de 6 cm. de altura tiene por base un triángulo equilátero de 8 cm. de base y 6'9 de altura. ¿Cuánto pesa si 1 cm^3 de plomo pesa 11'35 gr.?

767. Un almiar o montón de paja se compone de un cilindro rematado por un cono. La circunferencia de la base tiene 16 m.; la altura del cilindro es de 3'20 m., y la altura total, de 6 m. Calcular el volumen.

768. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cono de revolución cuyo lado mide 41 cm. y el radio de la base, 9 cm.

769. Suponiendo que la Tierra es esférica, calcular su área y su volumen.

770. Un depósito rectangular de 3'15 m. de largo, 2'10 m. de ancho y 1'90 m. de profundo está lleno de agua. Se sumerge en él una bola de 0'70 m. de diámetro. Se desea saber: 1.º, cuántos litros de agua se derramarán; 2.º, cuántos kilolitros de agua quedarán en el depósito.